

# ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Unter Mitarbeit von

H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner  
E. Kramar, A. Mehli, W. Nestel, H. Pilöty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann  
M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, R. Theile, F. Tank, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von

KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung:

J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma

Geschäftsführende Redaktion:

F. Rühmann

BAND 14

OKTOBER 1960

HEFT 10

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

**KWR**

**Trägerfrequenzkabel**  
**KABELWERK RHEYDT AKT.-GES.**

RHEYDT (RHLD.)

# INHALT

## Originalmitteilungen:

Seite

Die Anregung von Wellentypen höherer Ordnung durch die Grundwelle an einer Versatzstelle zweier runder Hohlleiter . . . . .	421
Von K. Schnetzler	
Zur Anregung höherer Wellentypen in Hohlleiterübergängen . . . . .	425
Von K. Schnetzler	
Über die Verwendbarkeit aktiver Filter zur Messung der Frequenzspektra von Impulsen . . . . .	432
Von H. G. Jungmeister	
Berechnung der Mischvorgänge in Transistorstufen bei niedrigen Frequenzen auf Grund des Ersatzschaltbildes . . . . .	435
Von J. S. Vogel und M. J. O. Strutt	
Die elektronische Umkehrung von photographischen Farbnegativen . . . . .	441
Von K. Welland	
Über den Entwurf von Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit einer im Tschebyscheffschen Sinne approximierten konstanten Gruppenlaufzeit . . . . .	451
Von E. Ulbrich und H. Piloty	
Aktive Hochfrequenzspektrometer für die ionosphärische Echolotung.	
III. Bestimmung der wahren aus der scheinbaren Reflexionshöhe . . . . .	468
Von A. Paul	
Buchbesprechungen. . . . .	440, 476
Berichtigung . . . . .	476

## ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

### Schriftleitung:

Dr. phil. J. Piesch,  
Wien IV/50, Karlsplatz 13, Fernruf U 465 30

Dr.-Ing. J. Schunack,  
Berlin-Lichterfelde 1, Drakestraße 1a, Fernruf 73 22 61

Prof. Dr.-Ing. E. h. Dr. techn. M. Strutt,  
Zürich 7, Gloriastraße 35, Fernruf 32 73 30

Oberstudiendirektor Dr. phil. A. Thoma,  
Fulda, Heinrich-von-Bibra-Platz 1,  
Fernruf (vorm.) 29 62, (nachm.) 44 28

### Geschäftsführende Redaktion und Anzeigenverwaltung:

Ing. Friedrich Rühmann  
(17a) Karlsruhe-Durlach, Machstraße 4, Fernruf 428 54

Alle Zuschriften werden entweder an die Schriftleitung oder an die Geschäftsführende Redaktion erbeten.

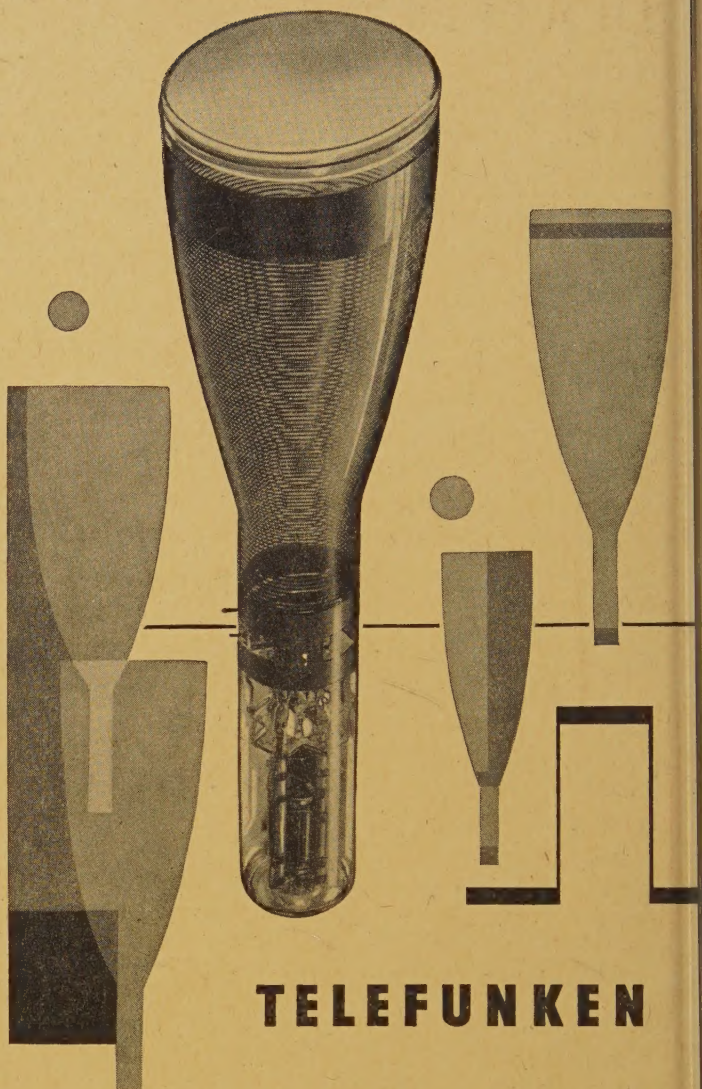
### Geschäftliche Hinweise:

Der Bezug des Archivs der elektrischen Übertragung durch Verlag, Post und Buchhandel ist im Abonnement zum Preis von DM 20,— für das Vierteljahr möglich. Einzelhefte können zum Preis von DM 7,— geliefert werden. Anzeigenaufträge und -anfragen bitten wir an die Anzeigenverwaltung der Zeitschrift zu richten.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

Postscheckkonto Stuttgart 64383

**DG 10-18**, eine Elektronenstrahlröhre mit extrem hoher Ablenkempfindlichkeit (Ablenkfaktor 3,7 V/cm) und sehr großer Meßgenauigkeit (Linearitätsabweichung max. 0,5%).



## TELEFUNKEN

TELEFUNKEN-Elektronenstrahlröhren für

Oszillographen sind Erzeugnisse lang-

jähriger Forschung und Entwicklung. Sie

vereinigen große Linienschärfe und enge

Toleranzen mit großer Leuchtdichte und

Ablenkempfindlichkeit und werden von Jahr

zu Jahr in steigendem Maße verwendet.

Entwicklungsstellen der Industrie erhalten

auf Anforderung Druckschriften mit

genauen technischen Angaben.



**TELEFUNKEN**  
RÖHREN-VERTRIEB  
ULM-DONAU

# ARCHIV

## DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG (A.E.Ü.)

Unter Mitarbeit von H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner, E. Kramar, A. Mehli, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann, M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, F. Tank, R. Theile, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung: J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma / Geschäftsführende Redaktion: F. Rühmann  
S. HIRZEL VERLAG, Stuttgart

Band 14

Oktober 1960

Heft 10

### Die Anregung von Wellentypen höherer Ordnung durch die Grundwelle an einer Versatzstelle zweier runder Hohlleiter

Von KARL SCHNETZLER

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG, München

(A.E.Ü. 14 [1960], 421–424; eingegangen am 22. August 1960)

DK 621.372.823:621.372.83

Es werden Formeln und Kurven angegeben für die Anregung ausbreitungsfähiger höherer Wellentypen durch die Grundwelle an einer Versatzstelle zweier gleicher runder Hohlleiter.

The excitation by the fundamental mode of higher modes capable of propagation at a butt joint between two slightly displaced over-moded circular waveguides is calculated.

#### 1. Einleitung

Runde Hohlleiter, in denen auch Wellentypen höherer Ordnung ausbreitungsfähig sind, werden vielfach als Antennenzuleitungen zur Übertragung zweier senkrecht zueinander polarisierter Wellen verwendet, entweder um die Verluste niedrig zu halten, oder weil der zu übertragende Bandbereich größer ist als der ausnutzbare Eindeutigkeitsbereich des Hohlleiters. Überall, wo der Hohlleiter von der Idealform abweicht, findet dann eine Umwandlung der einfallenden Welle in solche höheren Wellentypen statt. Stetige Verformungen erstrecken sich meist über mehrere Wellenlängen und haben infolgedessen weniger Einfluß als Unstetigkeiten, wie sie an Flanschverbindungen auftreten können. Da sich die Form am Flansch sehr genau rund halten läßt, ist hier insbesondere der fast unvermeidliche geringe Hohlleiterversatz wirksam.

Die Anregung ausbreitungsfähiger höherer Wellentypen ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn die Leitung nicht nur am Eingang, sondern auch später wieder für den höheren Wellentyp undurchlässig wird, etwa wenn der Querschnitt an einem Krümmer wieder verengt werden muß. Es entsteht dann ein Resonanzraum für die höhere Welle, deren Amplitude infolgedessen für bestimmte Frequenzen merkbare Werte annehmen kann. Dies führt zu erheblichen, unter Umständen unzulässig hohen Reflexionsspitzen der Grundwelle.

#### 2. Berechnungsverfahren

Die Anregung höherer Wellentypen an einer Versatzstelle zweier runder Hohlleiter durch die  $H_{01}$ -Welle ist von JIGUCHI [1] in 1. Näherung nach

der bekannten Methode der Feldanpassung in der Trennebene berechnet worden. Von KATZENELLENBAUM [2] stammt eine Berechnung, ebenfalls 1. Näherung, für beliebige kleine Formänderungen mittels der Lorentzschen Reziprozitätsformel. Fällt die Grundwelle ein, so hat das elektrische Querfeld im Hohlleiter an der Trennfläche im allgemeinen einen unstetigen Verlauf. Es ist dann nicht ohne weiteres (wie in den zitierten Arbeiten) erlaubt, in der Entwicklung des Querfeldes die (unendlich vielen) Glieder zweiter Ordnung im Unstetigkeitsparameter (hier der Verschiebung  $v$ ) zu vernachlässigen. Wie leicht die unbedenkliche Vernachlässigung zu falschen Ergebnissen führen kann, wird im Anhang an einem Beispiel gezeigt. Ihre Berechtigung bedarf vielmehr einer besonderen Untersuchung.

Um von solchen Bedenken frei zu sein, wird die Anregung hier, ausgehend von einem stetigen Hohlleiter, ohne weitere Verwendung von Reihen berechnet. Die Anregung höherer Wellentypen in einem kontinuierlichen Übergang zwischen zwei Hohlleitern derselben Richtung ist für kleine Winkel in 1. Näherung bekannt. Ausdrücke dafür finden sich z. B. bei SOLYMAR [3] (seine Formeln bedürfen allerdings in gewissen Fällen der Korrektur, siehe Anhang 1). Die am Eingang und Ausgang des Übergangs auslaufenden höheren Wellentypen setzen sich danach aus längs des ganzen Übergangs durch die einfallende Welle erzeugten Elementarwellen der höheren Typen zusammen, und zwar ist der Anregungskoeffizient der vor- bzw. rücklaufenden Welle auf der Strecke  $dz$  in seiner Bezeichnung  $\pm S_{10}^{\pm} dz$ , hierbei bezeichnet der Index 0 die einfallende, der Index 1 die angeregte Welle. Die  $+$  -Zeichen beziehen sich dabei auf die vorlaufende,

die —-Zeichen auf die rücklaufende angeregte Welle. Es ist genau genommen der Anregungskoeffizient an dem kleinen Querschnittssprung, der entsteht, wenn der Übergang durch eine Treppenkurve der Schrittbreite  $dz$  approximiert wird (Bild 2) [4]. Die Größen  $S_{ik}$  sind durch Randintegrale über die Schnittkurve des Übergangs mit der Ebene  $z = \text{const}$  gegeben (Bild 1), sie haben die Form

$$S_{10} = \oint f_{10} \tan \theta \, ds,$$

wobei  $f_{10}$  eine Funktion der Wellentypen 0 und 1 des geraden Hohlleiters mit dem bei  $z$  vorliegenden Querschnitt ist.  $\theta$  ist der Winkel derjenigen Manteltangente, die auf der Schnittkurve senkrecht steht, mit der  $z$ -Achse, positiv gerechnet für einen mit zunehmendem  $z$  sich erweiternden Übergang, negativ für einen konvergierenden.

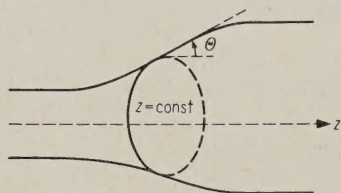


Bild 1.  
Übergang zwischen  
zwei Hohlleitern gleicher  
Richtung.

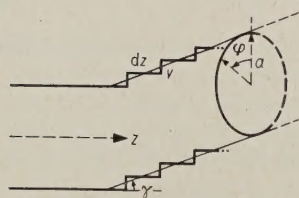


Bild 2.  
Der geneigte runde  
Hohlleiter.

Fügt man nun lauter horizontale Hohlleiterstücke der Länge  $dz$ , jeweils um  $v$  ( $\ll dz$ ) vertikal verschoben, aneinander, so erhält man die Approximation eines unter dem Winkel  $\tan \gamma = v/dz$  geneigten Hohlleiters, dessen Querschnitt mit der Ebene  $z = \text{const}$  ein Kreis vom Radius  $a$  ist (Bild 2). Zwischen  $\theta$ ,  $\gamma$  und dem Azimuthwinkel  $\varphi$ , der von der Verschiebungsrichtung aus gerechnet wird, besteht die Beziehung

$$\tan \theta = \tan \gamma \cos \varphi. \quad (1)$$

Man erhält also die zum Versatz  $v$  gehörige Anregung, wenn man in  $\pm S_{10}^\pm dz$  die Größe  $\tan \gamma \, dz$  durch  $v$ , bzw.  $\tan \theta \, dz$  durch  $v \cos \varphi$  ersetzt.

Die SOLYMARSche Theorie gibt nur die Koeffizienten 1. Ordnung in  $\theta$ , man erhält also auch nur die zu  $v$  proportionalen Anregungskoeffizienten.

Auf analoge Weise läßt sich die Anregung höherer Wellentypen an kleinen Sprungstellen anderer Art, z. B. bei einer Querschnittsvergrößerung, berechnen.

Die im nächsten Abschnitt angegebenen Formeln gelten auch an der Grenzfrequenz, wenn man den genauen, die Wandverluste berücksichtigenden komplexen Wert von  $\beta_1$  verwendet. Dabei ist angenommen, daß der Versatz so gering ist, daß die höhere Welle auch in der Umgebung der Grenzfrequenz klein gegen die einfallende Welle bleibt.

### 3. Ergebnisse

Es bezeichne

- $D$  den Durchmesser der Hohlleiter,
- $v$  die Verschiebung des einen gegen den andern,  $v/D \ll 1$ ,
- $\lambda$  die Wellenlänge in freiem Raum,
- $\lambda_{nm}$  die Hohlleiterwellenlänge des Typs  $nm$ ,
- $J_n(x)$  die Besselsche Funktion vom Index  $n$ ,
- $X_{nm}$  die  $m$ -te nicht verschwindende Wurzel von  $J_n(x) = 0$ ,
- $X'_{nm}$  die  $m$ -te nicht verschwindende Wurzel von  $J'_n(x) = 0$ , ( $X'_{11} = 1,841$ ,  $X_{01} = 2,405$  usw.),
- $a$  den Hohlleiterradius,
- $A_{ip}^\pm$  die Anregung des Wellentyps  $i$  durch den Wellentyp  $p$  an einer Versatzstelle mit der Verschiebung  $v$  (+ nach vorn, — nach rückwärts), definiert als Wurzel aus dem Leistungsverhältnis (an Stelle der Leistung tritt in der Nähe der Grenzfrequenz der Welle  $i$  das Stromspannungsprodukt).

Indizes in runden Klammern bedeuten einen  $E$ -Typ, solche in eckigen Klammern einen  $H$ -Typ. Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, werden diese Klammern auch weggelassen.

In der Nähe der Grenzfrequenz ist  $\lambda_i$  durch  $2\pi/\beta_i$  zu ersetzen und für  $\beta_i$  der genaue, die Wandverluste berücksichtigende Wert einzuführen.

Dann gilt (für die Ableitung siehe Anhang 2):

#### A) Anregung durch die Grundwelle ( $H_{11}$ ):

Es werden in 1. Näherung nur Wellen angeregt, deren 1. Index (Winkelindex) 0 oder 2 ist.

##### a) Anregung der $E_{0m}$ -Wellen

Fällt die Richtung der Verschiebung mit der des elektrischen Feldes der einfallenden  $H_{11}$ -Welle zusammen, so ist

$$A_{(0m)[11]}^\pm = \mp \frac{v}{D} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda_{0m} \lambda_{11}} \left| \sqrt{\frac{2}{X_{11}^{\prime 2} - 1}} \right|. \quad (2)$$

Die unbedenkliche Übertragung der Methode von JIGUCHI würde nur die Hälfte dieses Wertes ergeben. Bei einer Verschiebung quer zum einfallenden Feld findet keine Anregung proportional  $v/D$  statt.

##### b) Anregung der $H_{0m}$ -Wellen

Fällt die Richtung der Verschiebung mit der des elektrischen Feldes der  $H_{11}$ -Welle zusammen, so ist die Anregung in 1. Näherung Null.

Erfolgt die Verschiebung quer zum einfallenden Feld, so ist

$$A_{[0m][11]}^\pm = - \frac{v}{D} \frac{X'_{0m} X_{11}^{\prime 2}}{X_{0m}^{\prime 2} - X_{11}^{\prime 2}} \left| \sqrt{\frac{2}{X_{11}^{\prime 2} - 1}} \right| \sqrt{\frac{\lambda_{0m}}{\lambda_{11}}} \left( 1 \pm \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{0m}} \right). \quad (3)$$

##### c) Anregung der $E_{2m}$ -Wellen

Die Stärke der Anregung ist hier von der Richtung der Verschiebung unabhängig, erfolgt sie in Richtung des  $H_{11}$ -Feldes, so wird die eine Polaris-

tion der  $E_{2m}$ -Welle, senkrecht dazu die andere Polarisation angeregt:

$$A_{(2m)[11]}^{\pm} = \mp \frac{v}{D} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda_{2m} \lambda_{11}} \frac{1}{\sqrt{X_{11}^{\prime 2} - 1}}. \quad (4)$$

d) Anregung der  $H_{2m}$ -Wellen

Die Anregung ist wieder von der Richtung der Verschiebung unabhängig, mit Änderung der Richtung ändert sich nur die Polarisation:

$$A_{[2m][11]}^{\pm} = \frac{v}{D} \sqrt{\frac{\lambda_{2m}}{\lambda_{11}}} \frac{X_{2m}^{\prime 2} (2 - X_{11}^{\prime 2}) \pm \sqrt{\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{2m}}} X_{11}^{\prime 2} (2 - X_{2m}^{\prime 2})}{(X_{2m}^{\prime 2} - X_{11}^{\prime 2}) \sqrt{(X_{11}^{\prime 2} - 1)(X_{2m}^{\prime 2} - 4)}}. \quad (5)$$

B) Anregung durch die  $H_{01}$ -Welle

Hier werden in 1. Näherung nur  $H_{1m}$ -Wellen angeregt. Ihr elektrisches Feld steht in der Mitte des Hohlleiters auf der Richtung der Verschiebung senkrecht,

$$A_{[1m][01]}^{\pm} = \frac{v}{D} \frac{X_{01}^{\prime 2} X_{1m}^{\prime 2}}{X_{01}^{\prime 2} - X_{1m}^{\prime 2}} \sqrt{\frac{2}{X_{1m}^{\prime 2} - 1}} \left( \sqrt{\frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{01}}} \pm \sqrt{\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{1m}}} \right), \quad (6)$$

in Übereinstimmung mit JIGUCHI [1]. Das Querfeld in der Trennebene hat beim Einfall einer  $H_{01}$ -Welle eben eine sehr geringe Unstetigkeit.

In Bild 3 sind die nach A) berechneten Anregungskoeffizienten 1. Ordnung aller im Bereich  $D/\lambda = 1,4$  bis  $D/\lambda = 2$  ausbreitungsfähigen höheren Wellentypen bei Anregung durch die Grundwelle ( $H_{11}$ ) an einem Versatz von  $v/D = 10/100$  aufgetragen. Dieses Frequenzband enthält die Grenzfrequenzen der  $E_{21}$ - und der  $E_{02}$ -Welle. In ihrer Nähe wird der Anregungskoeffizient komplex. Eingetragen sind dann sowohl die angeregte relative Energie wie auch der Absolutwert des Anregungskoeffizienten. Liegt der in der Einleitung erwähnte Fall vor, bei dem die angeregte Welle in einem Resonanzraum der Länge  $L$  eingesperrt ist, so ist der bei Resonanz auftretende Maximalwert des Reflexionskoeffizienten der einfallenden Welle, wie sich zeigen läßt, im wesent-

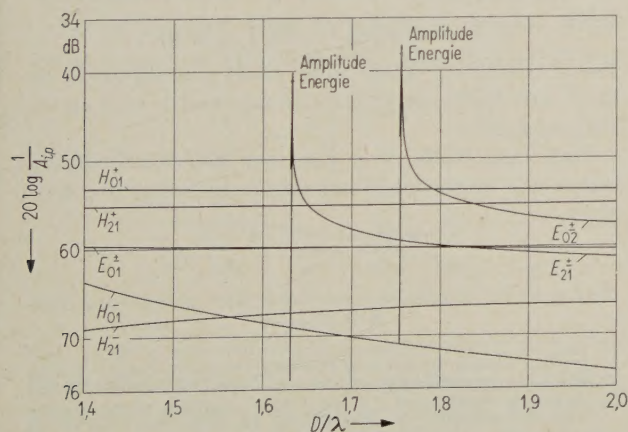


Bild 3. Die Anregungskoeffizienten 1. Näherung der höheren Wellentypen im Bereich  $D/\lambda = 1,4$  bis  $D/\lambda = 2$  beim Versatz  $v/D = 10/100$  bei Anregung durch die Grundwelle ( $H_{11}$ ). (Spitzen für Kupferrohr mit  $D = 71,42$  mm).

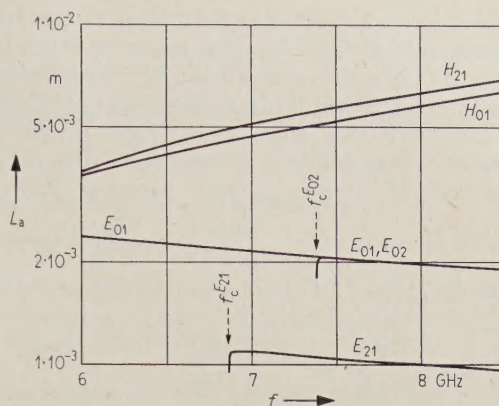


Bild 4. Anregungslänge (in m) der höheren Wellentypen bei Anregung durch die Grundwelle. Kupferrohr mit  $D = 71,42$  mm, Versatz  $0,1$  mm;

$E_{01}, E_{02}$  Versatz in Richtung des elektr. Feldes,  
 $H_{01}$  Versatz quer zum elektrischen Feld,  
 $E_{21}, H_{21}$  Versatz beliebig.

lichen durch  $Q_{\max} = L_a/L$  gegeben, hierbei ist

$L_a = \frac{(|A^+| + |A^-|)^2}{2\alpha}$  die „Anregungslänge“ ( $\alpha$  Dämpfungskonstante der angeregten Welle). Diese Größe (in Meter) ist in Bild 4 für ein Kupferrohr von  $D = 71,42$  mm dargestellt. Wie ersichtlich, wird die Spitze von  $|A|$  durch die gleichzeitige Zunahme von  $\alpha$  bei Annäherung an die Grenzfrequenz praktisch kompensiert. Jenseits der Grenzfrequenz nehmen die aufgetragenen Größen außerordentlich schnell ab.

# Anhang 1: Korrektur der SOLYMARSCHEN Anregungskoeffizienten

Der von SOLYMAR [3] in Form eines Kurvenintegrals angegebene Kopplungskoeffizient zwischen zwei  $H$ -Wellen

$$T_{[i][p]} = \frac{h_i^2}{h_p^2 - h_i^2} \oint \tan \theta \psi_i \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial n^2} ds \quad (7)$$

bedarf in manchen Fällen der Korrektur (für die Bezeichnungen vgl. [3]).

Ausgehend von der Definition

$$T_{ip} = \int e_i \frac{\partial e_p}{\partial z} dS \quad (8)$$

findet man zunächst durch Anwendung der Greenschen Formel

$$T_{[i][p]} = \frac{h_i^2}{h_i^2 - h_p^2} \oint \psi_i \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \psi_p}{\partial z} ds. \quad (9)$$

Die Differentiation nach  $z$  und  $n$  können vertauscht werden, vorausgesetzt, daß  $n$  eine von  $z$  unabhängige Richtung bedeutet, nämlich die der

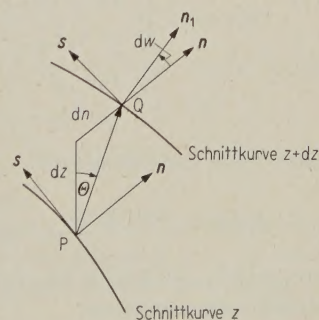


Bild 5. Vektorbeziehungen an einer verwundenen Oberfläche.

äußeren Normalen an die Schnittkurve im Integrationspunkt P (Bild 5). Geht man von P um den Vektor  $dz \cdot \mathbf{z} + dn \cdot \mathbf{n}$  zu dem Oberflächenpunkt Q, so ist  $dn/dz = \tan \theta$ . In Q hat aber die Schnittkurvennormale im allgemeinen nicht mehr die Richtung von  $\mathbf{n}$ , sondern sei um den Winkel  $dw$  gedreht in die Richtung  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} + dw \cdot \mathbf{s}$ . In P ist

$\frac{\partial \psi_{[p]}}{\partial n} = 0$ , in Q aber  $\frac{\partial \psi_{[p]}}{\partial n} = -\frac{\partial \psi_{[p]}}{\partial s} dw$ , da ja hier  $\partial \psi_{[p]}/\partial n_1 = 0$ . Damit wird die Zunahme von  $\partial \psi_{[p]}/\partial n$  von P nach Q

$$d \frac{\partial \psi_{[p]}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi_p}{\partial n} dz + \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \psi_p}{\partial n} dn = -\frac{\partial \psi_p}{\partial s} dw,$$

$$\text{also } \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi_{[p]}}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \psi_p}{\partial n} \tan \theta - \frac{\partial \psi_p}{\partial s} \frac{dw}{dz} \quad (10)$$

auf der Oberfläche. — Diese Gleichung tritt anstelle von Gl. (13) bei SOLYMAR.

Entsprechend sind der Kopplungs- und der Anregungskoeffizient:

$$T_{[i][p]} = \frac{h_i^2}{h_p^2 - h_i^2} \oint \psi_i \left( \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial n^2} \tan \theta + \frac{\partial \psi_p}{\partial s} \frac{dw}{dz} \right) ds, \quad (11)$$

$$S_{[i][p]}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\beta_i}{\beta_p}} T_{[p][i]} \mp \sqrt{\frac{\beta_p}{\beta_i}} T_{[i][p]} \right). \quad (12)$$

Die Größe  $dw/dz$  ist ein Maß für die „Verwindung“ der Oberfläche, hängt aber auch von der Orientierung der  $z$ -Achse ab. Zum Beispiel findet man für den Fall des geneigten runden Hohlleiters nach Bild 2 durch eine einfache geometrische Überlegung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\tan \gamma \sin \varphi}{a}. \quad (13)$$

## Anhang 2: Berechnung der Anregung höherer Wellentypen durch die Grund- ( $H_{11}$ ) Welle an einer Versatzstelle zweier gleicher runder Hohlleiter

Nach SOLYMAR [3] gilt für die Anregung einer E-Welle ( $i$ ) durch eine H-Welle [ $p$ ]

$$S_{(i)[p]} = -\frac{\sqrt{\lambda_i \lambda_p}}{2 \lambda} \oint \tan \theta \frac{\partial \psi_{(i)}}{\partial r} \frac{\partial \psi_{[p]}}{a \partial \varphi} a d\varphi. \quad (14)$$

Für die Anregung einer H-Welle [ $i$ ] siehe Anhang 1, Gl. (11) bis (13). Hierbei sind die normierten Potentiale

$$\psi_{(nm)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi}} \frac{J_n(X_{nm} r/a)}{X_{nm} J_{n-1}(X_{nm})} \begin{cases} \cos n \varphi \\ \sin n \varphi \end{cases},$$

$$\psi_{[nm]} = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi}} \frac{J_n(X'_{nm} r/a)}{\sqrt{X'^2_{nm} - n^2} J_n(X'_{nm})} \begin{cases} \sin n \varphi \\ \cos n \varphi \end{cases}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 2 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

Setzt man diese Potentiale ein und substituiert

$$v \cos \varphi \text{ für } \tan \theta, \quad \frac{v}{a} \sin \varphi \text{ für } \frac{dw}{dz},$$

so ergeben sich die im Abschnitt 3 angegebenen Ausdrücke ohne weiteres.

## Anhang 3: Die Vernachlässigung höherer Glieder in der Reihenentwicklung unstetiger Funktionen

Daß diese Vernachlässigung im allgemeinen nicht erlaubt ist, zeigt folgendes Beispiel (Bild 6):

Es bezeichne  $\sigma$  die gemeinsame Trennfläche der beiden um  $v$  versetzten runden Hohlleiter,  $\tau$  den halbmondförmigen, an Metall liegenden Rest des Querschnitts  $S$  des rechten Hohlleiters.  $\mathbf{e}_0 (H_{11})$ ,

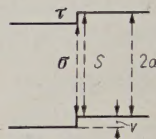


Bild 6. Zwei versetzte Hohlleiter.

$\mathbf{e}_1 (E_{01}), \dots$  seien die normierten transversalen elektrischen Eigenvektoren im rechten Hohlleiter,  $\mathbf{E}_t$  das elektrische Transversalfeld in der Trennfläche. Von links falle die in der Verschiebungsrichtung polarisierte Grundwelle ein mit der Amplitude eins. Das Transversalfeld auf  $S$  ist in der Öffnung im wesentlichen durch  $\mathbf{e}_0$  gegeben, steigt aber in der Nähe der Kanten stark an und fällt bei  $\tau$  unstetig auf Null. Entwickelt man es nach den Eigenvektoren des rechten Hohlleiters,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}_t \text{ auf } \sigma \\ 0 \text{ auf } \tau \end{array} \right\} = V_0 \mathbf{e}_0 + V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + \dots,$$

so ist  $V_0$  von der Ordnung 1;  $V_1, V_2, \dots$  sind von 1. oder höherer Ordnung in  $v$  klein. Multipliziert man beide Seiten mit  $\mathbf{e}_1$  und integriert über  $S$ , so folgt

$$V_1 = \int_S \mathbf{E}_t \mathbf{e}_1 dS = \int_{\sigma} \mathbf{E}_t \mathbf{e}_1 d\sigma.$$

Integriert man nur über  $\sigma$ , so wird

$$\int_{\sigma} \mathbf{E}_t \mathbf{e}_1 d\sigma = V_0 \int_{\sigma} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 d\sigma + V_1 \int_{\sigma} \mathbf{e}_1^2 d\sigma + V_2 \int_{\sigma} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 d\sigma + \dots$$

$$\text{Nun ist } \int_{\sigma} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 d\sigma = -\frac{v}{a} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1,84^2 - 1}},$$

$$\int_{\sigma} \mathbf{e}_1^2 d\sigma = 1 - \frac{2}{\pi} \frac{v}{a}.$$

$V_2 \int_{\sigma} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 d\sigma$  usw. sind alle mindestens von 2. Ordnung in  $v/a$  klein. Werden sie vernachlässigt, so folgt

$$V_1 (1 - \int_{\sigma} \mathbf{e}_1^2 d\sigma) = V_0 \int_{\sigma} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 d\sigma.$$

Diese Gleichung kann aber nicht richtig sein, da links eine Größe zweiter Ordnung, rechts eine erster Ordnung steht.

Daß diese Reihe von Gliedern zweiter Ordnung selbst von erster Ordnung sein kann, zeigt das Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v \sin n v}{n} = v \frac{\pi - v}{2}.$$

### Schrifttum

- [1] JIGUCHI, S., Mode conversion in the transmission of the  $T_{01}$  wave through a slight tilt and a slight set-off waveguide. Congrès Intern. Circuits et Antennes Hyperfréquences, Paris Oktober 1957, S. 150.
- [2] KATZENELLENBAUM, B. Z., Der Zusammenschluß zweier Wellenleiter mit benachbarten Querschnitten. Zh. tech. Phys. (UdSSR) **24** [1954], 1892–1906 (russ.).
- [3] SOLYMAR, L., Spurious mode generation in non-uniform waveguides. Transact. Inst. Radio Engrs. MTT-7 [1959], 379–383.
- [4] SCHNETZLER, K., Die Reflexion der Grundwelle an den Knickstellen eines Hohlleiters, insbesondere bei einem stetigen Übergang von einem rechteckigen auf einen runden Hohlleiter. A.E.Ü. **14** [1960], 177–182.

# Zur Anregung höherer Wellentypen in Hohlleiterübergängen

Von KARL SCHNETZLER

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG, München

(A.E.Ü. 14 [1960], 425 — 431; eingegangen am 22. August 1960)

DK 621.372.83

Es werden Formeln abgeleitet, die es erlauben, die Anregung höherer Wellentypen in allmählichen Hohlleiterübergängen auch dann zu berechnen, wenn die höheren Wellentypen nur in einem Teil des Übergangs ausbreitungsfähig sind.

Formulas are derived for calculating the generation of spurious modes in a gradual waveguide transition even for the case that the spurious mode can propagate only in part of the transition.

## 1. Einleitung

Es ist oft erwünscht oder notwendig, elektrische Wellen in einem Hohlleiter zu führen, dessen Querschnitt so groß ist, daß sich neben der Grundwelle auch höhere Wellentypen ausbreiten können. Wird die Welle einem solchen Hohlleiter von einem mit kleinerem Querschnitt zugeführt, so tritt im Übergangsstück eine im allgemeinen unerwünschte Anregung dieser höheren Wellentypen auf. Dabei liegt, wenigstens wenn die Grundwelle einfällt, meist der Fall vor, daß die höheren Wellentypen nur in einem Teil des Übergangs ausbreitungsfähig sind.

Eine Untersuchung dieses Problems für den Spezialfall eines runden rotationssymmetrischen Übergangs, auf den die  $H_{01}$ -Welle einfällt, findet sich bei KATZENELLENBAUM [1], der Airysche Funktionen heranzieht. Im folgenden wird der allgemeine Fall eines beliebigen Hohlleiterquerschnitts und eines beliebigen einfallenden Wellentyps behandelt. Die Benützung spezieller Funktionen erübrigt sich, wenn der Grenzquerschnitt nicht gerade in nächster Nähe eines Übergangsendes liegt.

## 2. Die Anregung höherer Wellen in Hohlleiterübergängen

Der Übergang (Bild 1) soll zwei gerade Hohlleiter derselben Richtung aber von verschiedenem

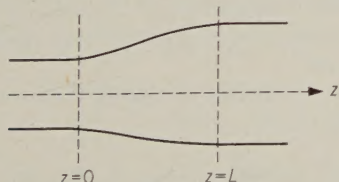


Bild 1. Übergang zwischen zwei Hohlleitern mit derselben Achse.

Querschnitt verbinden. Die Umformung soll dabei allmählich erfolgen, so daß die Neigung der Oberfläche gegen die Achse ( $z$ -Richtung) sowie eine eventuell auftretende Verwindung überall klein bleiben. Dann durchsetzt die einfallende Welle den Übergang im allgemeinen mit geringem Energieverlust, die Anregung aller anderen Wellen bleibt

klein und erfolgt in 1. Näherung nur durch die einfallende Welle. Eine Ausnahme hiervon tritt vor allem dann ein, wenn eine Welle angeregt wird, die überall dieselbe Geschwindigkeit wie die einfallende Welle hat. Solche Fälle treten aber in den Anwendungen im allgemeinen nicht auf und sollen ausdrücklich ausgeschlossen werden.

Die den obigen Voraussetzungen entsprechenden Übergänge zerfallen noch in zwei Klassen, je nachdem ob die betrachtete höhere Welle im ganzen Übergang ausbreitungsfähig ist, oder nur in einem Teil. Den ersten Fall hat SOLYMAR [2] untersucht. Seine Ergebnisse seien zum Vergleich vorangestellt.

### A) Die höhere Welle ist im ganzen Übergang ausbreitungsfähig

Wenn auch der kleinste Querschnitt noch merklich größer als der Grenzquerschnitt ist, gilt nach SOLYMAR in 1. Näherung:

Die höhere Welle (Index 1) wird von der einfallenden (Index 0) auf der Strecke  $dz$  mit einer Stärke

$$S_{10}^+ dz \text{ nach vorn,} \\ - S_{10}^- dz \text{ nach rückwärts}$$

angeregt. Die Anregungskoeffizienten  $S_{ik}^\pm$  sind von ihm berechnet worden, einige sind im Anhang wiedergegeben. Bezeichnet  $\beta_i(z) = 2\pi/\lambda_i$  die Wellenzahl,  $\lambda_i$  die Hohlrohrwellenlänge des Wellentyps  $i$  des geraden Hohlleiters mit dem an der Stelle  $z$  vorliegenden Querschnitt, so wird die Amplitude der auslaufenden höheren Welle am Ausgang  $z = L$  (Bild 1)

$$A_1^+(L) = \int_0^L e^{-j \int_0^z \beta_0 dz} S_{10}^+ dz e^{-j \int_z^L \beta_1 dz} \quad (1)$$

und der rücklaufenden höheren Welle am Eingang  $z = 0$

$$A_1^-(0) = \int_0^L e^{-j \int_0^z \beta_0 dz} (-S_{10}^-) dz e^{-j \int_0^z \beta_1 dz} \quad (2)$$

Diese Ausdrücke beziehen sich auf eine einfallende Welle der Amplitude 1 am Eingang ( $z = 0$ ). Das Quadrat der Amplitude gibt jeweils den Energiestrom an.

B) Die höhere Welle ist nur in einem Teil des Übergangs ausbreitungsfähig

Die Rechnung hierfür ist im Anhang durchgeführt, und zwar unter der einschränkenden Annahme, daß der Querschnitt am Eingang merklich kleiner, am Ausgang merklich größer ist als der Grenzquerschnitt der höheren Welle (Bild 2, der Grenzquerschnitt liegt bei  $z = 0$ ). Außerdem soll

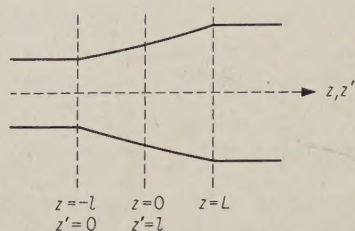


Bild 2. Übergang zwischen zwei Hohlleitern mit Grenzquerschnitt im Übergangsgebiet.

der Querschnitt in der Umgebung von  $z = 0$  nicht konstant und nur ein einziger solcher Querschnitt im Übergang vorhanden sein. Sind dann einfallende und höhere Welle von verschiedenem Typ (die eine  $H$ -Typ, die andere  $E$ -Typ), so findet man am Ausgang in 1. Näherung

$$A_1^+(L) = \int_0^L e^{-j \int_{-l}^z \beta_0 dz} S_{10}^+ dz e^{-j \int_z^L \beta_1 dz} + \int_0^L e^{-j \int_{-l}^z \beta_0 dz} (-S_{10}^-) dz e^{-j \int_0^z \beta_1 dz} (\mp j) e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} + \int_0^L e^{-j \int_0^{z'} \beta_0 dz'} S_{10}^+ dz' e^{-j \int_{z'}^L |\beta_1| dz'} e^{-j \int_0^L \beta_1 dz}, \quad (3)$$

wobei das obere Vorzeichen im zweiten Summanden gilt, wenn die einfallende Welle vom  $H$ -Typ, die angeregte vom  $E$ -Typ ist. Das untere Vorzeichen gilt im umgekehrten Fall. Das Ausbreitungsgebiet (Bild 2) erstreckt sich von  $z = 0$  bis  $z = L$ , das Dämpfungsgebiet von  $z = -l$  bis  $z = 0$  bzw. von  $z' = 0$  bis  $z' = l$ .

Die Schreibweise der Integranden macht die Bedeutung der drei Summanden klar: Der erste stellt die im Ausbreitungsgebiet durch die einfallende Welle nach vorn angeregten Wellen dar, der zweite die dort nach rückwärts angeregten, die am Grenzquerschnitt mit einem Phasensprung von  $90^\circ$  total reflektiert werden, und der dritte die schwache aus dem Dämpfungsgebiet in das Übergangsgebiet gelangende Erregung. Daß die Welle aus drei solchen Summanden besteht, ist einleuchtend. Die Tatsache, daß die Koeffizienten  $S_{10}^\pm$  sich bis herab zum Grenzquerschnitt verwenden lassen, war aber nicht von vornherein zu erwarten. Dies ist nun auch in den Fällen, bei denen einfallende und angeregte Welle vom selben Typ sind (beide  $E$ -Typ oder beide  $H$ -Typ), nicht mehr so. Man erhält hier neben den in Gl. (3) angegebenen Gliedern noch Zusatzglieder, die in der Umgebung des Grenzquerschnitts ent-

stehen. Für die Gl. (3) entsprechenden Formeln sei auf den Anhang verwiesen (siehe dort Gl. (46) und (51)).

Die Formeln für den umgekehrten Fall, bei dem die einfallende Welle sich aus dem weiten auf den engen Hohlleiter zu bewegt, folgen durch sinnge-  
mäßige Vertauschung von  $S^+$  mit  $S^-$  usw.

### Anhang

**Berechnung der Anregung einer höheren Welle, die nur in einem Teil des Übergangs ausbreitungsfähig ist**

Zugrunde gelegt werden die Verhältnisse von Bild 2, die einfallende Welle komme von links.

Ausgangspunkt sind die Maxwell'schen Gleichungen in der Form von Telegraphengleichungen. Sie ergeben sich, wenn man das Transversalfeld  $\mathbf{E}_t$ ,  $\mathbf{H}_t$  nach den normierten Transversalvektoren  $\mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{h}_n$  des geraden Hohlleiters entwickelt. Es bedeute

$k = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl im freien, den Hohlleiter erfüllenden Medium,

$\beta_i = 2\pi/\lambda_i$  die Wellenzahl des Typs  $i$  im geraden Hohlleiter,  $\lambda_i$  die Wellenlänge im Hohlleiter,

$s = \beta_i^2 = k^2 - h_i^2$ ,

$h_i = 2\pi/\lambda_{ci}$  die Grenzwellenzahl des Typs  $i$ ,  $\lambda_{ci}$  die Grenzwellenlänge,

$\zeta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  den Feldwellenwiderstand des freien Mediums,

$K_i$  die Feldwellenimpedanz des Typs  $i$ ,

$\psi_i$  das Potential des Typs  $i$ . Dieses ist für  $H$ -Wellen proportional zu  $H_z$ , für  $E$ -Wellen proportional zu  $E_z$  und durch die Forderung  $h_i^2 \int \psi_i^2 dS = 1$  normiert (Integration über den Querschnitt  $z = \text{const}$ ),

$\theta$  den Winkel zwischen der Mantellinie des Übergangs und der  $z$ -Richtung, positiv gerechnet für einen mit zunehmendem  $z$  sich erweiternden, negativ für einen konvergierenden Übergang.

Entwickelt man

$$\mathbf{E}_t = \sum V_n(z) \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{H}_t = \sum I_n(z) \mathbf{h}_n,$$

so nehmen die Maxwell'schen Gleichungen für eine Zeitabhängigkeit  $e^{j\omega t}$  die Form von Telegraphengleichungen an.

Bezeichnet der Index  $m$  eine  $E$ -Welle, so ist nach SOLYMAR [2]

$$\frac{dV_m}{dz} + j \frac{\beta_m^2}{k} \zeta I_m = \sum_p T_{pm} V_p, \quad (4)$$

$$\frac{dI_m}{dz} + j \frac{k}{\zeta} V_m = - \sum_p T_{mp} I_p \quad (5)$$

und für eine  $H$ -Welle (Index  $n$ )

$$\frac{dV_n}{dz} + j k \zeta I_n = \sum_p T_{pn} V_p, \quad (6)$$

$$\frac{dI_n}{dz} + j \frac{\beta_n^2}{k \zeta} V_n = - \sum_p T_{np} I_p. \quad (7)$$

Bleibt die Anregung der höheren Wellen im Übergang klein und durchsetzt ihn die einfallende Welle (Index 0) ohne merklichen Verlust, was bei allmählichen Übergängen im allgemeinen der Fall ist (siehe oben), so vereinfachen sich die Gleichungen für den  $E$ -Wellentyp 1 in 1. Näherung zu

$$\frac{dV_1}{dz} + j \frac{\beta_1^2}{k} \zeta I_1 = T_{01} V_0, \quad (8)$$

$$\frac{dI_1}{dz} + j \frac{k}{\zeta} V_1 = -T_{10} I_0 \quad (9)$$

bzw. für einen  $H$ -Typ vom Index 1

$$\frac{dV_1}{dz} + j k \zeta I_1 = T_{01} V_0, \quad (10)$$

$$\frac{dI_1}{dz} + j \frac{\beta_1^2}{k \zeta} V_1 = -T_{10} I_0. \quad (11)$$

Die beiden Gleichungspaare gehen durch die Substitutionen

$$V_0 \leftrightarrow I_0, \quad V_1 \leftrightarrow I_1, \quad \zeta \leftrightarrow 1/\zeta, \quad T_{ik} \leftrightarrow -T_{ki}$$

ineinander über.

Die Kopplungsgrößen  $T_{ik}$  sind von SOLYMAR in der Form von leicht auswertbaren Randintegralen dargestellt worden. Ist z. B. die Welle 0 vom  $H$ -Typ, die Welle 1 vom  $E$ -Typ, so ist

$$T_{10} = 0, \quad (12)$$

$$T_{01} = - \oint \tan \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial s} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} ds. \quad (13)$$

(Seine Formel für den Kopplungskoeffizienten zweier  $H$ -Wellen bedarf allerdings in gewissen, in der Praxis aber selten vorkommenden Fällen der Korrektur [4].)

Die Größen  $T_{ik}$  hängen mit den Anregungskoeffizienten  $S_{10}^\pm$  im Fall A) nach SOLYMAR zusammen mittels

$$S_{10}^\pm = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{K_0}{K_1}} T_{01} \mp \sqrt{\frac{K_1}{K_0}} T_{10} \right). \quad (14)$$

Dabei ist bekanntlich die Feldwellenimpedanz der nach  $+z$  fortschreitenden Welle im Ausbreitungsgebiet bzw. der nach  $+z$  gedämpften Welle im Dämpfungsgebiet

$$\text{im } E\text{-Fall: } K_1 = \frac{\beta_1}{k} \zeta \quad \text{bzw.} \quad K_1 = -j \frac{|\beta_1|}{k} \zeta, \quad (15)$$

$$\text{im } H\text{-Fall: } K_1 = \frac{k}{\beta_1} \zeta \quad \text{bzw.} \quad K_1 = j \frac{k}{|\beta_1|} \zeta. \quad (16)$$

Die Wurzeln sind für positiven Radikanden positiv zu nehmen und sollen sonst durch einen im 3. Quadranten der komplexen  $z$ -Ebene von 0 nach  $\infty$  verlaufenden Verzweigungsschnitt erklärt sein. Führt man den Wellenparameter  $A^+$  einer nach  $+z$  fortschreitenden bzw. gedämpften Welle ein durch

$$A^+ = V^+ / \sqrt{K} = I^+ / \sqrt{K},$$

so hat er mit der obigen Wurzelfestsetzung im Dämpfungsgebiet eine Phasenverschiebung von  $\pm 45^\circ$  gegen  $V^+$  und  $I^+$ .

Es soll nun als erstes der Fall behandelt werden, bei dem die einfallende Welle (Index 0) vom  $H$ -Typ, die höhere Welle (Index 1) aber vom  $E$ -Typ ist. Dann ist nach Gl. (12)  $T_{10} = 0$ :

$$\frac{dV_1}{dz} + j \frac{\beta_1^2}{k} \zeta I_1 = T_{01} V_0, \quad (17)$$

$$\frac{dI_1}{dz} + j \frac{k}{\zeta} V_1 = 0. \quad (18)$$

Differentiation von Gl. (18) und Einsetzen von Gl. (17) ergibt

$$\frac{d^2 I_1}{dz^2} + \beta_1^2 I_1 + j \frac{k}{\zeta} T_{01} V_0 = 0. \quad (19)$$

Diese Gleichung ist von der Form

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + s u + f = 0 \quad (20)$$

$$\text{mit } s = \beta_1^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda_{c1}} \right)^2, \quad f = j \frac{k}{\zeta} T_{01} V_0.$$

Sie muß in der komplexen  $z$ -Ebene untersucht werden. Der Übergang (Bild 2) soll nun noch folgenden Bedingungen genügen:

1. Es gibt nur eine einzige Stelle ( $z = 0$ ), an der  $\beta_1 = 0$  ist. Der Übergang soll dort eine endliche Neigung haben, es sei etwa  $\left. \frac{d\beta_1^2}{dz} \right|_0 > 0$ . Dann hat  $s$  bei  $z = 0$  eine einfache Nullstelle.
2. In der Nähe der Enden des Übergangs soll sich der Querschnitt merklich vom Grenzquerschnitt unterscheiden, und neben der Neigung soll auch die Krümmung dort klein sein, dergestalt, daß in diesen Gebieten die Ungleichungen

$$\left| \frac{3}{4} \left( \frac{\beta_1'}{\beta_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\beta_1''}{\beta_1} \right| \ll |\beta_1^2| \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_1'}{\beta_1} \right) \right| \ll |\beta_1|$$

gelten.

Dann hat die homogene Gl. (20) dort die Näherungslösungen

$$u_1 = s^{-1/4} e^{jw} \quad \text{und} \quad u_2 = s^{-1/4} e^{-jw} \quad (21), (22)$$

$$\text{mit} \quad w = \int_0^z s^{1/2} dz. \quad (23)$$

Außerdem ist dort

$$\frac{du_{1,2}}{dz} \approx \pm j s^{1/2} u_{1,2}. \quad (24)$$

In der Nähe von  $z = 0$  ist  $w \sim z^{3/2}$ ,  $s^{1/4} \sim z^{-1/4}$ .  $u_1$  und  $u_2$  sind also in der komplexen  $z$ -Ebene nicht eindeutig, sie nehmen auf den beiden Seiten des Verzweigungsschnitts verschiedene Werte an. Auf der positiven Realachse hat  $u_1$  den Charakter einer rücklaufenden,  $u_2$  den einer vorlaufenden Welle. Führt man auf der negativen Realachse den Abstand  $r$  vom Nullpunkt als Parameter ein, so wird

$$w = -j \int_0^r \sqrt{|s|} dr.$$

$u_1$  steigt dort also mit wachsendem  $r$  exponentiell an,  $u_2$  fällt exponentiell ab.

Da  $u_1$  und  $u_2$  für große  $|z|$  Näherungslösungen der homogenen Gl. (20) sind, erhält man eine Nähe-

rungslösung der inhomogenen Gl. (20) für große  $|z|$  in

$$u_p = \frac{j}{2} u_1 \int_0^z u_2 f dz - \frac{j}{2} u_2 \int_0^z u_1 f dz =$$

$$= - \int_0^z \frac{\sin[w(z) - w(t)]}{s^{1/4}(z) s^{1/4}(t)} f(t) dt. \quad (25)$$

Diese Funktion ist in der  $z$ -Ebene eindeutig, sie hat auf beiden Seiten des Verzweigungsschnittes denselben Wert. Ebenfalls eindeutig ist die durch die Grenzbedingungen festgelegte gesuchte Lösung  $u$  der inhomogenen Gl. (20). Die Funktion  $u - u_p$  ist also ebenfalls eindeutig und für große  $z$  eine Näherungslösung der homogenen Gl. (20). Als solche hat sie die Näherungsdarstellung

$$u - u_p \approx A u_1 + B u_2 \text{ für große } |z| \quad (26)$$

( $A, B$  Konstante).

Da links eine eindeutige Funktion, rechts aber eine mehrdeutige steht, kann die Darstellung mit festem  $A$  und  $B$  nicht in der ganzen Ebene richtig sein. Die Konstanten sind vielmehr in verschiedenen Teilen der Ebene verschieden. Dies ist möglich, weil dort, wo, wie z. B. auf der negativen reellen Achse, ein Summand stark überwiegt, der Koeffizient des anderen sich ändern kann, ohne den Näherungscharakter von (26) zu zerstören. Die Verhältnisse sind unter dem Namen des Stokesschen Phänomens bekannt, eine einfache Darstellung findet sich z. B. in dem Artikel von FREEHAFFER über Phasenintegrale in [3], S. 74. Dort wird gezeigt, daß die Koeffizienten  $A_+$  und  $B_+$  der rück- und vorlaufenden

Welle auf der positiven Realachse mit dem Koeffizienten  $A_-$  der dominanten Funktion  $u_1$  auf der negativen Achse zusammenhängen durch

$$A_- = A_+ + j B_+, \text{ also } B_+ = j(A_+ - A_-). \quad (27)$$

Die Konstanten  $A_+$  und  $A_-$  ergeben sich aus den Grenzbedingungen:

Für  $z = L$  muß die Welle 1 rein vorlaufend sein.

Für  $z = -l$  muß sie nach rückwärts gedämpft sein.

Es muß also nach Gl. (15)

$$\frac{V_1(L)}{I_1(L)} = \frac{\zeta}{k} s^{1/2}(L) \quad \text{und} \quad \frac{V_1(-l)}{I_1(-l)} = \frac{\zeta}{k} s^{1/2}(-l)$$

sein. Aus Gl. (18) folgt dann, daß an beiden Enden

$$dI_1/dz = -j s^{1/2} I_1$$

sein muß. Setzt man hier die Näherung (26) ein, d. h.

$$I_1 = u = u_p + A_+ u_1 + B_+ u_2$$

in der Nähe des Ausgangs,

bzw.  $I_1 = u = u_p + A_- u_1 + B_- u_2$

in der Nähe des Eingangs,

$$\text{so ergibt sich } A_+ = -\frac{j}{2} \int_0^L u_2 f dz \quad (28)$$

$$\text{und } A_- = -\frac{j}{2} \int_0^{-l} u_2 f dz = \frac{j}{2} \int_0^l u_2 f dz'. \quad (29)$$

Damit wird

$$B_+ = j(A_+ - A_-) = \frac{1}{2} \int_0^L u_2 f dz + \frac{1}{2} \int_0^l u_2 f dz'. \quad (30)$$

Am Ausgang ist

$$I_1(L) = -\frac{j}{2} u_2(L) \int_0^L u_1 f dz + \frac{1}{2} u_2(L) \int_0^L u_2 f dz + \frac{1}{2} u_2(L) \int_0^l u_2 f dz' = \quad (31)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta_1(L)}} \int_0^L \frac{V_0}{\zeta} \frac{k T_{01} dz}{2 \sqrt{\beta_1(z)}} e^{-j \int_z^L \beta_1 dz} + \frac{1}{\sqrt{\beta_1(L)}} \int_0^L \frac{V_0}{\zeta} \frac{-k T_{01} dz}{2 \sqrt{\beta_1(z)}} e^{-j \int_0^z \beta_1 dz} (-j) e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\beta_1(L)}} \int_0^l \frac{V_0}{\zeta} \frac{j k T_{01} dz'}{2 s^{1/4}(z')} e^{-\int_{z'}^l |\beta_1| dz'} e^{-j \int_0^L \beta_1 dz}. \quad (32)$$

Führt man noch die Wellenamplituden der Vorwärtswellen ein

$$A_0^+ = V_0 \sqrt{\frac{\beta_0}{k \zeta}}, \quad A_1^+(L) = I_1(L) \sqrt{\frac{\zeta}{k} \beta_1(L)}$$

und die Anregungskoeffizienten nach Gl. (14)

$$S_{10}^\pm = \frac{k T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0} \beta_1} \quad \text{für } z > 0, \quad S_{10}^\pm = \frac{1}{2} \frac{j k T_{01}}{s^{1/4} \sqrt{\beta_0}} \quad \text{für } z < 0,$$

so wird schließlich

$$A_1^+(L) = \int_0^L A_0^+(z) S_{10}^+ dz e^{-j \int_z^L \beta_1 dz} + \int_0^L A_0^+(z) (-S_{10}^-) dz e^{-j \int_0^z \beta_1 dz} (-j) e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} +$$

$$+ \int_0^l A_0^+(z') S_{10}^+ dz' e^{-\int_{z'}^l |\beta_1| dz'} e^{-j \int_0^L \beta_1 dz}. \quad (33)$$

Hat die einfallende Welle am Eingang die Amplitude 1, so ist

$$A_0^{\text{r}} = \text{e}^{-\text{j} \int_l^z \beta_0 \text{d} z}.$$

Damit ist Gl. (3) abgeleitet.

Ist die einfallende Welle vom  $E$ -Typ, die angeregte vom  $H$ -Typ, so ist  $T_{01} = 0$ . Die Substitutionen  $V_0 \leftrightarrow I_0$ ,  $V_1 \leftrightarrow I_1$ ,  $\zeta \leftrightarrow 1/\zeta$ ,  $T_{ik} \leftrightarrow -T_{ki}$  führen nicht nur die Differentialgleichungen, sondern auch die Grenzbedingungen des vorigen Falles in die des jetzigen über. Die Überlegungen verlaufen genau analog, ein Unterschied ergibt sich erst zum Schluß bei der Einführung der Anregungskoeffizienten  $S_{10}^{\pm}$ . Nach Gl. (14) ergibt sich nämlich  $S_{10}^+$  ebenfalls durch die angegebene Substitution, für  $S_{10}^-$  gilt dagegen das umgekehrte Vorzeichen. In Gl. (33) ist daher der Reflexionskoeffizient  $-\text{j}$  der rücklaufenden Welle am Grenzquerschnitt durch  $+\text{j}$  zu ersetzen.

Als nächster Fall werde derjenige betrachtet, bei dem sowohl die einfallende als auch die angeregte Welle vom  $E$ -Typ sind. Die Differentialgleichungen sind (8) und (9), bei denen aber jetzt beide rechte Seiten von Null verschieden sind. Man erhält wieder Gl. (20), bei der aber jetzt

$$f = \text{j} \frac{k}{\zeta} T_{01} V_0 + \frac{\text{d}}{\text{d} z} (T_{10} V_0) \tag{34}$$

ist. Die weiteren Überlegungen bis einschließlich Gl. (27) sind wieder dieselben wie oben. Eliminiert man aber jetzt in den Grenzbedingungen

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{\zeta}{k} s^{1/2} \quad (z = -l, L)$$

die Größe  $V_1$  mittels Gl. (9), so ergibt sich, daß an den Enden

$$\frac{\text{d} I_1}{\text{d} z} = -\text{j} s^{1/2} I_1 - T_{10} I_0$$

sein muß. Infolgedessen werden jetzt die Konstanten  $A_+$ ,  $A_-$  und  $B_+$ :

$$A_+ = -\frac{\text{j}}{2} \int_0^L u_2 f \text{d} z + \frac{\text{j}}{2} u_2(L) T_{10}(L) I_0(L), \tag{35}$$

$$A_- = \frac{\text{j}}{2} \int_0^l u_2 f \text{d} z' + \frac{\text{j}}{2} (u_2 T_{10} I_0) \Big|_{z'=0}, \tag{36}$$

$$B_+ = \frac{1}{2} \int_0^L u_2 f \text{d} z + \frac{1}{2} \int_0^l u_2 f \text{d} z' - \frac{1}{2} u_2(L) T_{10}(L) I_0(L) + \frac{1}{2} (u_2 T_{10} I_0) \Big|_{z'=0}. \tag{37}$$

Damit wird jetzt

$$\begin{aligned} I_1(L) = & -\frac{\text{j}}{2} u_2(L) \left[ \int_0^L u_1 f \text{d} z - u_1(L) T_{10}(L) I_0(L) \right] + \frac{1}{2} u_2(L) \left[ \int_0^L u_2 f \text{d} z - u_2(L) T_{10}(L) I_0(L) \right] + \\ & + \frac{1}{2} u_2(L) \left[ \int_0^l u_2 f \text{d} z' + u_2 T_{10} I_0 \Big|_{z'=0} \right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Dies entspricht Gl. (31) und kann durch Einführen des Ausdrucks für  $f$  und der Wellenamplituden in eine der Gl. (32) bzw. (33) entsprechende Form gebracht werden. Eine Umformung der Integrale läßt die Ähnlichkeit mit Gl. (33) noch besser hervortreten. Es ist

$$u_1' = u_1 \left( \text{j} s^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{s'}{s} \right), \quad u_2' = u_2 \left( -\text{j} s^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{s'}{s} \right),$$

also

$$\begin{aligned} \int_0^L u_1 \frac{\text{d} T_{10} I_0}{\text{d} z} - u_1(L) T_{10}(L) I_0(L) = \\ = -\text{j} \int_0^L s^{1/2} u_1 I_0 T_{10} \text{d} z + \int_0^L \left[ \frac{\text{d}}{\text{d} z} (u_1 T_{10} I_0) + \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_1 T_{10} I_0 \right] \text{d} z - u_1(L) T_{10}(L) I_0(L) = \\ = -\text{j} \int_0^L s^{1/2} u_1 T_{10} I_0 \text{d} z + 2 \sqrt{\frac{k}{\zeta}} G_1(L) \end{aligned} \tag{39}$$

mit 
$$2 \sqrt{\frac{k}{\zeta}} G_1(L) = \int_0^L \left[ \frac{d}{dz} (u_1 T_{10} I_0) + \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_1 T_{10} I_0 \right] dz - u_1(L) T_{10}(L) I_0(L), \quad (40)$$

bzw. 
$$G_1(L) = \int_0^L \left[ \frac{d}{dz} \left( u_1 \frac{T_{10}}{2\sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right) + \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_1 \frac{T_{10}}{2\sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right] dz - u_1(L) \frac{T_{10}(L)}{2\sqrt{\beta_0(L)}} A_0^+(L),$$

wobei die Amplitude der einfallenden Welle  $A_0^+ = I_0 \sqrt{\beta_0 \zeta / k}$  eingeführt wurde.  $G_1(L)$  ist ein von der Umgebung von  $z = 0$  herrührender Beitrag, er ändert sich in der Nähe der Enden nur noch wenig. Liegen nämlich  $L$  und  $L' < L$  in genügender Entfernung vom Grenzquerschnitt, so daß  $\left| \frac{1}{4} \frac{s'}{s} \right| \ll |s^{1/2}|$  ist, so ist

$$2 \sqrt{\frac{k}{\zeta}} [G_1(L) - G_1(L')] = \int_{L'}^L \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_1 T_{10} I_0 dz$$

klein gegen den Beitrag des ersten Summanden in Gl. (39),

$$-j \int_{L'}^L s^{1/2} u_1 T_{10} I_0 dz.$$

Ebenso wird

$$\int_0^L u_2 \frac{d(T_{10} I_0)}{dz} dz - u_2(L) T_{10}(L) I_0(L) = j \int_0^L s^{1/2} u_2 T_{10} I_0 dz + 2 \sqrt{\frac{k}{\zeta}} G_2(L), \quad (41)$$

$$G_2(L) = \int_0^L \left[ \frac{d}{dz} \left( u_2 \frac{T_{10}}{2\sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right) + \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_2 \frac{T_{10}}{2\sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right] dz - u_2(L) \frac{T_{10}(L)}{2\sqrt{\beta_0(L)}} A_0^+(L), \quad (42)$$

$$\int_0^l u_2 \frac{d(T_{10} I_0)}{dz'} dz' + u_2 T_{10} I_0 \Big|_{z'=0} = j \int_0^l s^{1/2} u_2 T_{10} I_0 dz' + 2 \sqrt{\frac{k}{\zeta}} G_3(l), \quad (43)$$

$$G_3(l) = \int_0^l \left[ \frac{d}{dz'} \left( u_2 \frac{T_{10}}{2\sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right) + \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_2 \frac{T_{10}}{2\sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right] dz' + u_2 \frac{T_{10}}{2\sqrt{\beta_0}} A_0^+ \Big|_{z'=0}. \quad (44)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{I_1(L)}{u_2(L)} &= \int_0^L u_1 \left( \frac{V_0}{\zeta} \frac{k T_{01}}{2} - I_0 \frac{\beta_1 T_{10}}{2} \right) dz + \int_0^L u_2 \left( \frac{V_0}{\zeta} \frac{j k T_{01}}{2} + I_0 \frac{j \beta_1 T_{10}}{2} \right) dz + \\ &+ \int_0^l u_2 \left( \frac{V_0}{\zeta} \frac{j k T_{01}}{2} + I_0 \frac{j s^{1/2} T_{10}}{2} \right) dz' + \sqrt{\frac{k}{\zeta}} [-j G_1(L) + G_2(L) + G_3(l)]. \end{aligned} \quad (45)$$

Führt man noch die Wellenamplituden

$$A_0^+ = V_0 \sqrt{\frac{k}{\beta_0 \zeta}} = I_0 \sqrt{\frac{\beta_0 \zeta}{k}},$$

$$A_1^+(L) = I_1(L) \sqrt{\frac{\zeta}{k}} \beta_1(L)$$

ein und die Anregungskoeffizienten nach Gl. (14)

$$S_{10}^\pm = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}} T_{01} \mp \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}} T_{10} \right) \quad \text{für } z > 0,$$

$$S_{10}^\pm = \frac{1}{2} \left( j \frac{\sqrt{\beta_0}}{s^{1/4}} T_{01} + j \frac{s^{1/4}}{\sqrt{\beta_0}} T_{10} \right) \quad \text{für } z < 0,$$

so wird schließlich

$$A_1^+(L) = \int_0^L A_0^+(z) S_{10}^+ dz e^{-j \int_z^L \beta_1 dz} + \int_0^L A_0^+(z) (-S_{10}^-) dz e^{-j \int_0^z \beta_1 dz} (-j) e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} + \\ + \int_0^L A_0^+(z') S_{10}^+ dz' e^{-j \int_{z'}^L \beta_1 dz'} e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} + [-j G_1(L) + G_2(L) + G_3(l)] e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} . \quad (46)$$

$G_1, G_2$  und  $G_3$  sind in den Gl. (40), (42) und (44) erklärt.

Sind schließlich sowohl die einfallende als auch die angeregte Welle vom  $H$ -Typ, so führen wieder die Substitutionen  $V_0 \leftrightarrow I_0$ ,  $V_1 \leftrightarrow I_1$ ,  $\zeta \leftrightarrow 1/\zeta$ ,  $T_{ik} \leftrightarrow -T_{ki}$  die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen des vorigen Problems in die des jetzigen über. Statt Gl. (45) erhält man

$$\frac{V_1(L)}{u_2(L)} = \int_0^L u_1 \left( I_0 \zeta \frac{-k T_{10}}{2} + V_0 \frac{\beta_1 T_{01}}{2} \right) dz + \int_0^L u_2 \left( I_0 \zeta \frac{-jk T_{01}}{2} - V_0 \frac{j \beta_1 T_{01}}{2} \right) dz + \\ + \int_0^L u_2 \left( I_0 \zeta \frac{-jk T_{10}}{2} - V_0 \frac{j s^{1/2} T_{01}}{2} \right) dz' + \sqrt{k \zeta} [-j H_1(L) + H_2(L) + H_3(l)] \quad (47)$$

mit 
$$H_1(L) = - \int_0^L \left[ \frac{d}{dz} \left( u_1 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right) + \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_1 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right] dz + \left( u_1 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right)_{z=L} , \quad (48)$$

$$H_2(L) = - \int_0^L \left[ \frac{d}{dz} \left( u_2 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right) + \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_2 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right] dz + \left( u_2 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right)_{z=L} , \quad (49)$$

$$H_3(l) = - \int_0^l \left[ \frac{d}{dz} \left( u_2 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right) + \frac{1}{4} \frac{s'}{s} u_2 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right] dz' - \left( u_2 \frac{T_{01}}{2 \sqrt{\beta_0}} A_0^+ \right)_{z'=0} . \quad (50)$$

Führt man die Wellenamplituden

$$A_0^+ = I_0 \left[ \frac{k \zeta}{\beta_0} = V_0 \right] \sqrt{\frac{\beta_0}{k \zeta}} , \quad A_1^+(L) = V_1(L) \left[ \sqrt{\frac{\beta_1(L)}{k \zeta}} \right]$$

ein und die Anregungskoeffizienten nach Gl. (14)

$$S_{10}^\pm = \frac{1}{2} \left( \left[ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}} T_{01} \mp \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}} T_{10} \right) \right) \quad \text{für } z > 0 ,$$

$$S_{10}^+ = \frac{1}{2} \left( -j \frac{s^{1/4}}{\sqrt{\beta_0}} T_{01} - j \frac{\sqrt{\beta_0}}{s^{1/4}} T_{10} \right) \quad \text{für } z < 0 ,$$

so wird schließlich

$$A_1^+(L) = \int_0^L A_0^+(z) S_{10}^+ dz e^{-j \int_z^L \beta_1 dz} + \int_0^L A_0^+(z) (-S_{10}^-) dz e^{-j \int_0^z \beta_1 dz} j e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} + \\ + \int_0^L A_0^+(z') S_{10}^+ dz' e^{-j \int_{z'}^L \beta_1 dz'} e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} + [-j H_1(L) + H_2(L) + H_3(l)] e^{-j \int_0^L \beta_1 dz} \quad (51)$$

mit  $H_1, H_2$  und  $H_3$  nach Gl. (48) bis (50).

In der obigen Theorie sind die Verluste vernachlässigt worden. Sie ist daher auf Übergänge extrem geringer Neigung nicht direkt anwendbar.

#### Schrifttum

- [1] KATZENELLENBAUM, B. Z., Long symmetrical waveguide junction for  $H_{01}$ -waves. Radio Engrg. and Electronics (UdSSR) (Radiotekhnika i elektronika) **2** [1957], 531–546.  
[2] SOLYMAR, L., Spurious mode generation in nonuniform waveguides. Transact. Inst. Radio Engrs. MTT-**7** [1959], 379–383.  
[3] KERR, D., Propagation of short radio waves. McGraw-Hill Book Co., New York 1951.  
[4] SCHNETZLER, K., Die Anregung von Wellentypen höherer Ordnung durch die Grundwelle an einer Versatzstelle zweier runder Hohlleiter. A. E. Ü. **14** [1960], 421–424.

# Über die Verwendbarkeit aktiver Filter zur Messung der Frequenzspektren von Impulsen

Von HANS G. JUNGMEISTER

Mitteilung aus dem Elektrophysikalischen Institut der Technischen Hochschule München

(A.E.Ü. 14 [1960], 432–434; eingegangen am 23. Juli 1960)

DK 621.372.57:621.317.726

Für das Verfahren, die Frequenzspektren von Impulsen durch ein System verschieden abgestimmter  $LC$ -Resonanzkreise endlicher Güte unmittelbar zu messen, wurde von G. SEEGER und H. G. STÄBLEIN eine quantitative Fehlerabschätzung und Diskussion durchgeführt.  $LC$ -Resonanzkreise können jedoch für sehr niedrige Frequenzen nicht mehr mit ausreichenden Gütewerten hergestellt werden. Mit sogenannten „aktiven Filtern“, die kreisähnliche Eigenschaften besitzen, lassen sich aber auch bei niedrigsten Frequenzen relativ hohe Gütefaktoren erreichen. Es wird gezeigt, daß sich aktive Filter (Verstärker mit Doppel-T- $RC$ -Netzwerken im Gegenkopplungskanal) an Stelle von  $LC$ -Resonanzkreisen für Frequenzanalysatoren einsetzen lassen. Die hier erhaltenen Formeln werden mit den Ergebnissen von SEEGER und STÄBLEIN verglichen, wobei sich zeigt, daß die maßgeblichen Ausdrücke völlig gleich aufgebaut sind; die Fehlerabschätzung von SEEGER und STÄBLEIN kann daher unverändert auf die aktiven Filter übertragen werden.

G. SEEGER and H. G. STÄBLEIN carried through a quantitative error assessment and discussion concerning the method of directly measuring the frequency spectra of pulses by a set of differently tuned  $L$ - $C$  circuits of finite  $Q$ . For very low frequencies, however,  $L$ - $C$  circuits can no longer be realized with adequate  $Q$ -values. So-called “active filters”, which present properties similar to those of a tuned circuit, allow relatively high  $Q$ -values to be attained even at the lowest frequencies, however. It is shown that active filters (amplifiers with double-T type  $R$ - $C$  networks in the degenerative path) can be used on frequency analyzers instead of  $L$ - $C$  circuits. The related formulas are compared with the results obtained by SEEGER and STÄBLEIN; it turns out that the essential terms are of fully equal make-up; the error assessment as devised by SEEGER and STÄBLEIN can thus be transferred to the active filters without modification.

## 1. Einleitung

Zur Messung der Frequenzspektren von Impulsen endlicher Dauer wird häufig ein System von  $LC$ -Resonanzkreisen, die verschieden abgestimmt sind, benutzt. Dieses Verfahren ist jedoch nur brauchbar, wenn die niedrigste Spektralfrequenz des zu analysierenden Impulses eine gewisse, durch die Kreisgüte bestimmte Grenze nicht unterschreitet.  $LC$ -Kreise für sehr niedrige Frequenzen haben bekanntlich nur sehr geringe Güten; von der Kreisgüte hängt aber die Genauigkeit ab, mit der das Spektrum reproduziert wird. Es gibt also eine Frequenzgrenze, unterhalb deren das Meßergebnis unbrauchbar wird. Diese Grenze sowie der auftretende Meßfehler für jede Spektralfrequenz und Kreisgüte lassen sich mit Hilfe der in [1] durchgeführten Fehlerabschätzung für  $LC$ -Parallelresonanzkreise ermitteln.

Besteht nun aber die Aufgabe, niederfrequente Spektralanteile von Impulsen zu messen, die sich durch  $LC$ -Kreise nicht mehr erfassen lassen, so muß man auf elektronische Filter zurückgreifen, die kreisähnliche Frequenzcharakteristiken besitzen. Solche „aktive Filter“ können aber nur dann sinnvoll eingesetzt werden, wenn sich wie bei  $LC$ -Kreisen eine Fehlerabschätzung durchführen läßt. Die vorliegende Arbeit zeigt nun, daß aktive Filter, die aus Verstärkern mit Doppel-T- $RC$ -Filtern im Gegenkopplungskanal bestehen, in ihrem Verhalten gegenüber Impulsen eine so weitgehende Analogie zu  $LC$ -Parallelresonanzkreisen zeigen, daß die in [1] gebrachte Diskussion und Fehlerabschätzung ohne weiteres übernommen werden kann. Man kann also einen Frequenzanalysator ohne weiteres für  $LC$ -

Kreise dimensionieren und nachträglich die Kreise, die sich nicht mehr mit ausreichender Güte herstellen lassen, durch aktive Filter ersetzen.

## 2. Die Ermittlung des Impulsverhaltens von $LC$ -Kreisen

Um dem Leser die Übersicht zu erleichtern, seien zunächst die wichtigsten Gedankengänge von [1] wiederholt, die zur Ermittlung des Impulsverhaltens von  $LC$ -Kreisen führten.

Der zu analysierende Impuls kann beliebige Form haben, sei jedoch von endlicher Dauer. Der zeitliche Verlauf des Impulses sei allgemein gegeben durch

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > T \\ f(t) & \text{für } 0 < t < T. \end{cases} \quad (1)$$

Dieser Impuls werde als eingepprägter Strom auf einen Parallelresonanzkreis, bestehend aus  $R$ ,  $L$  und  $C$ ) gegeben. Das Frequenzspektrum des Impulses lautet

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2)$$

Die spektrale Verteilung der Spannung am Kreis ist gegeben durch

$$U(\omega) = I(\omega) \cdot Z(\omega), \quad (3)$$

wobei der frequenzabhängige komplexe Kreiswiderstand  $Z(\omega)$  gegeben ist durch

$$Z(\omega) = \frac{1}{C} \frac{-j\omega}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}, \quad (4)$$

worin  $\omega_1 = j\alpha/2 + \omega_E$ ,  $\omega_2 = j\alpha/2 - \omega_E$ ,

$$\omega_E = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\omega_0}\right)^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

und 
$$\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Es muß nun der zeitliche Verlauf der Spannung am Kreis,  $u(t)$ , die als Antwort auf den Impuls  $i(t)$  auftritt, ermittelt werden. Man kann sich zu diesem Zweck den Stromimpuls  $f(t)$  aus einer unendlichen Folge unendlich schmaler Impulse zusammengesetzt denken und dann die Antworten des Kreises auf alle diese Impulse überlagern. Die Antwort des Kreises auf einen solchen schmalen Impuls mit dem Spektrum  $\Delta F(\omega)$  ist dann

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta F(\omega) Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{f(x) \Delta x}{2\pi j C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{-j\omega x} e^{j\omega t}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} d\omega, \end{aligned}$$

darin ist  $f(x)$  die Höhe eines schmalen Rechteckimpulses im Intervall  $t = x$  bis  $t = x + \Delta x$ . Nach Auswertung des Integrals bildet man den Limes  $\Delta x \rightarrow dx$ , wodurch  $\Delta u \rightarrow du$  geht. Durch Integration über alle  $du$  ergibt sich die gesamte Antwort  $u(t)$  auf den Impuls  $i(t)$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\omega_E C} e^{-\alpha t/2} \sqrt{\omega_E^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega_E t + \varphi + \beta) \end{aligned} \quad (5)$$

für  $t > T$ .

Darin bedeuten

$$\beta = \arctan \alpha/2 \omega_E, \quad \varphi = \arctan A/B,$$

$$A = \int_0^T f(x) e^{\alpha x/2} \cos \omega_E x dx,$$

$$B = \int_0^T f(x) e^{\alpha x/2} \sin \omega_E x dx.$$

Die Amplitude der durch Gl. (5) dargestellten Schwingung wird wesentlich bestimmt durch den Ausdruck  $\sqrt{A^2 + B^2}$ . Dieser repräsentiert bis auf einen konstanten Faktor das Frequenzspektrum eines Impulses, der sich von dem eingespeisten Impuls nur durch den exponentiellen Faktor  $e^{\alpha x/2}$  unterscheidet, was auf eine Auswirkung der endlichen Kreisgüte bzw. Dämpfung zurückzuführen ist.

Gl. (5) dient in [1] als Ausgangspunkt für die Diskussion und Fehlerabschätzung. Wenn es also gelingt, für die aktiven Filter eine analog aufgebaute Gleichung aufzustellen, so kann die Fehlerabschätzung unverändert übernommen werden.

### 3. Das aktive Filter

Eine Frequenzcharakteristik, die, ähnlich wie beim  $LC$ -Parallelresonanzkreis, für eine einzelne Frequenz eine scharfe Spitze (minimale Dämpfung) aufweist, kann man auch erhalten, wenn man in den

Gegenkopplungskanal eines Verstärkers ein Netzwerk einfügt, das für eine einzelne Frequenz ein Dämpfungsmaximum besitzt, also eine Frequenzsperre darstellt. Da das Filter für sehr niedrige Frequenzen geeignet sein soll, darf es keine Induktivitäten enthalten. Für die Praxis hat sich am zweckmäßigsten das Doppel- $T$ - $RC$ -Netzwerk als Gegenkopplungsglied erwiesen, das in Bild 1 dargestellt

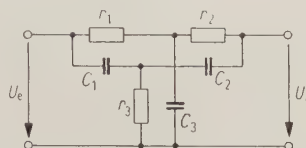


Bild 1. Doppel- $T$ - $RC$ -Vierpol;  $U_a/U_e = \varepsilon$ .

ist. Dabei sind folgende Dimensionierungsbedingungen einzuhalten:

$$r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad C_n = \frac{1}{r_n \omega_0}, \quad n = 1, 2, 3;$$

$\omega_0 = 2\pi f_0$  ist die gewünschte Resonanz- oder Durchlaßfrequenz.  $r_1$  und  $r_2$  sind frei wählbar, ihr Verhältnis beeinflußt jedoch die Güte. Im folgenden wird mit dem Symmetriemaß  $a$  gerechnet, das gegeben ist durch

$$a = \frac{r_2}{r_1 + r_2}.$$

Bezüglich des Verstärkers wird nur vorausgesetzt, daß sein Frequenzgang im Niederfrequenzbereich geradlinig, seine Phasendrehung in diesem Bereich  $180^\circ$  und seine Stabilität gegen Selbsterregung auch bei 100%iger Gegenkopplung für alle Frequenzen gewährleistet ist. Das Blockschaltbild des Gesamtfilters zeigt Bild 2. Die Konstruktion und Dimensionierung derartiger Filter wurde bereits in verschiedenen Arbeiten ausführlich beschrieben [2], [3], [4], so daß hier darauf verzichtet werden kann. Es sei nur bemerkt, daß vom Verfasser solche Filter mit Güten bis zu 200 aufgebaut und auch in Frequenzanalysatoren eingesetzt wurden.

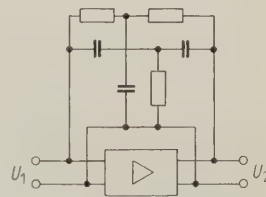


Bild 2. Blockschaltbild des aktiven Filters;  $U_2/U_1 = G$ .

### 4. Die Ermittlung des Impulsverhaltens von aktiven Filtern, die Doppel- $T$ - $RC$ -Netzwerke im Gegenkopplungskanal enthalten

Die  $LC$ -Resonanzkreise, die ja ihrer Natur nach Zweipole sind, werden am zweckmäßigsten mit eingepprägtem Strom betrieben. Die aktiven Filter dagegen, die echte Vierpole und ihrer Natur nach Spannungsverstärker sind, werden zweckmäßiger mit eingepprägter Spannung betrieben, d. h., ihre Eingänge werden parallel geschaltet und aus einer Quelle kleinen Innenwiderstandes (z. B. Kathodenfolgestufe) gespeist.

Die Gleichungen, die in [1] zur Gewinnung des Filterverhaltens aufgestellt wurden, müssen deshalb sinngemäß umgewandelt werden. Der zeitliche Ver-

lauf des zu analysierenden Impulses sei infolgedessen gegeben als

$$u_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \text{ und } t > T \\ f(t) & \text{für } 0 < t < T. \end{cases} \quad (6)$$

Das Frequenzspektrum lautet

$$U_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7)$$

Die spektrale Verteilung der Spannung am Ausgang eines Filters ist gegeben durch

$$U(\omega) = U_e(\omega) G(\omega), \quad (8)$$

dabei ist  $G(\omega)$  der Spannungsübertragungsfaktor des Gesamtfilters, der sich durch Einsetzen des Spannungsübertragungsfaktors  $\varepsilon$  des passiven Doppel-T-Netzwerks in die Gegenkopplungsgleichung

$$G = \frac{V}{1 + \varepsilon V} \quad (9)$$

ergibt.  $V$  ist darin die Verstärkung ohne Gegenkopplung, aber mit einem Abschlußwiderstand, der der Belastung durch das Gegenkopplungsnetzwerk entspricht. Mit

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{2}{a} \omega \omega_0} \quad (10)$$

ergibt sich somit

$$G = \frac{V}{V+1} \frac{(\omega - \omega_a)(\omega - \omega_b)}{(\omega - \omega_c)(\omega - \omega_d)} \quad (11)$$

mit  $\omega_a = j\omega_0 \left( \frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1} \right), \quad (11a)$

$$\omega_b = j\omega_0 \left( \frac{1}{a} - \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 1} \right). \quad (11b)$$

$$\omega_c = j \frac{\alpha_1}{2} + \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{2\omega_0}\right)^2}, \quad (11c)$$

$$\omega_d = j \frac{\alpha_1}{2} - \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{2\omega_0}\right)^2}, \quad (11d)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\omega_0}{a(V+1)} = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (11e)$$

Die Pole  $\omega_c$  und  $\omega_d$  der Übertragungsfunktion  $G(\omega)$  gleichen weitgehend den Polen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  der Impedanzfunktion  $Z(\omega)$  des  $LC$ -Kreises. Hierin ist auch der Grund für das gleichartige Verhalten der  $LC$ -Kreise und der aktiven Filter zu sehen.

Wendet man das gleiche Verfahren wie in [1] an, in dem man sich den (Spannungs-)Impuls  $f(t)$  aus einer unendlichen Folge unendlich schmaler Rechteckimpulse zusammengesetzt denkt, so erhält man wieder

$$\Delta F(\omega) = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-j\omega x} \Delta x$$

als Spektrum eines solchen Impulses ( $\Delta x$  sehr klein!). Es gibt sich dann

$$\Delta u(t) = \frac{f(x) \Delta x V}{2\pi(V+1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-x)} \frac{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{(\omega - \omega_3)(\omega - \omega_4)} d\omega,$$

woraus man schließlich als gesamte Antwort  $u(t)$  auf den Spannungsimpuls  $u_e(t)$  erhält:

$$u(t) = \frac{2V^2}{(V+1)\sqrt{a^2(V+1)^2 - 1}} e^{-\alpha_1 t/2} \times \quad (12)$$

$$\times \int \sqrt{\omega_F^2 + \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sin(\omega_F t + \varphi_1 + \beta_1) \quad \text{für } t > T$$

mit

$$\varphi_1 = \arctan A_1/B_1, \quad \beta_1 = \arctan \alpha_1/2 \omega_F,$$

$$A_1 = \int_0^T f(x) e^{\alpha_1 x/2} \cos \omega_F x dx,$$

$$B_1 = \int_0^T f(x) e^{\alpha_1 x/2} \sin \omega_F x dx,$$

$$\alpha_1 = \frac{2\omega_0}{a(V+1)}, \quad \omega_F = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1}{2\omega_0}\right)^2}.$$

Aus dem gleichartigen Aufbau der Gl. (12) und (5) erkennt man die Analogie zu den  $LC$ -Resonanzkreisen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß an Stelle des Faktors  $1/\omega_E C$  bei den  $LC$ -Kreisen, der die Dimension eines Widerstandes hat, der dimensionslose Faktor

$$\frac{2V^2}{(V+1)\sqrt{a^2(V+1)^2 - 1}}$$

steht, da es sich hier um die Eingabe von Spannungsimpulsen handelt. Für entsprechend hohe Werte der Verstärkung  $V$  (und damit der Güte  $Q$ ) vereinfacht sich obiger Faktor zu  $2/a$ ; d. h., die angezeigte Spektralampitude ist von der Verstärkung praktisch unabhängig, was im Hinblick auf Verstärkungsänderungen durch Spannungsschwankungen, Röhrenalterung usw. für die Meßgenauigkeit sehr wichtig ist.

Eine weitere Diskussion erübrigt sich, da auf Grund der Analogie der Gl. (12) und (5) die in [1] für die  $LC$ -Kreise durchgeführte Diskussion und Fehlerabschätzung ohne weiteres auf die aktiven Filter übertragen werden kann. Es sei lediglich bemerkt, daß an Stelle der Forderung nach gleichem  $C$  bei allen Kreisen für spektral richtige Anzeige hier eine andere tritt: Man muß die einzelnen Filter mit Ausgangsspannungsteilern versehen, deren Spannungsübertragungsfaktoren  $\ddot{u}$  die Bedingung  $\omega_F \ddot{u} = \text{const}$  erfüllen (gleiches  $a$  vorausgesetzt).

Die aktiven Filter, die Doppel-T- $RC$ -Netzwerke im Gegenkopplungskanal benutzen, sind also grundsätzlich zur Verwendung in Frequenzanalytoren als Ersatz für  $LC$ -Resonanzkreise geeignet.

#### Schrifttum

- [1] SEEGER, G. und STÄBLEIN, H. G., Über Fehler bei Messungen der Frequenzspektren von Impulsen mittels verschieden abgestimmter Resonanzkreise. A.E.U. **11** [1957], 325–330.
- [2] JUNGMEISTER, H. G. und KÖNIG, H. L., Filterschaltungen für extrem niedrige Frequenzen ohne Verwendung von Induktivitäten. A.E.U. **14** [1960], 317–324.
- [3] SCHMIDT, W., Das Doppel-T- $RC$ -Filter. Elektrotech. Z. (A) **73** [1952], 35–38.
- [4] VALLEY, G. und WALLMAN, H., Vacuum tube amplifiers. McGraw-Hill Book Co., New York 1948.

# Berechnung der Mischvorgänge in Transistorstufen bei niedrigen Frequenzen auf Grund des Ersatzschaltbildes

Von JAKOB S. VOGEL und MAX J. O. STRUTT

Mitteilung aus dem Institut für höhere Elektrotechnik der Eidgenössischen  
Technischen Hochschule Zürich

(A.E.Ü. 14 [1960], 435–440; eingegangen am 20. Juli 1960)

DK 621.375.4:621.376

Mit Hilfe einer zweckmäßigen Approximation der Eingangs- bzw. Übertragungscharakteristik des Transistors durch eine Summe von Exponentialfunktionen können die Mischvorgänge und die bei der Mischung auftretenden Verzerrungserscheinungen, wie Modulationsverzerrung, Modulationssteigerung, Kreuzmodulation und Pfeiftöne, einfach bestimmt werden.

Die Berechnungen erfolgen für das Niederfrequenzgebiet für beliebige Lastwiderstände und Zuleitungswiderstände im Basiskreis bei beliebig großen (erlaubten) Eingangssignalen.

Die Berechnungen beruhen dabei auf einer bereits veröffentlichten Arbeit über die Verzerrungseffekte bei Transistoren.

Using an appropriate approximation of the input- and of the transfer-characteristic of the transistor by a sum of exponential-functions, mixing-effects and nonlinear distortion effects such as modulation rise, distortion of modulation, cross-modulation and whistling notes may be evaluated easily.

The calculations are carried out in the low frequency range for various load resistances and lead resistances in the base circuit for input signals varying up to the largest permissible values.

The calculations are based on an already published paper on nonlinear distortion effects with transistors.

## 1. Einleitung

Nachdem in einer ersten Arbeit die Verzerrungseffekte bei Transistoren berechnet wurden [1], soll hier die Theorie auf die Mischung [2] mit Transistoren erweitert werden. Die Berechnungen basieren vollständig auf den Entwicklungen in [1] und erfordern die Kenntnis dieser Arbeit. Im folgenden Text wird öfters auf die in [1] vorkommenden Formeln Bezug genommen, und um Verwechslungen zu vermeiden, erfolgt die Numerierung der hier verwendeten Gleichungen in Fortsetzung derjenigen von [1]. Was die vorkommenden Symbole anbelangt, verweisen wir auf die in [1] angeführte Symbolliste.

Außer der eigentlichen Mischung werden hier auch die beim Mischvorgang auftretenden Verzerrungserscheinungen, wie Modulationssteigerung, Modulationsverzerrung und Kreuzmodulation, sowie das Entstehen von Pfeiftönen behandelt.

## 2. Die Mischung und die dabei auftretenden Verzerrungen

Die Spannung  $u$  am Eingang des Transistors setzt sich aus der Hilfsoszillatorspannung  $u_1 = \hat{U}_1 \sin \omega_1 t$  und der mit der Kreisfrequenz  $p$  modulierten Signalspannung  $u_2 = \hat{U}_2(1 + M \cos pt) \sin \omega_2 t$  zusammen:

$$u = u_1 + u_2. \quad (70)$$

Verwendet man die Abkürzungen

$$\frac{\hat{U}_1}{U_T^*} = x, \quad \frac{\hat{U}_2}{U_T^*} = z \quad \text{und} \quad \frac{\hat{U}_2(1 + M \cos pt)}{U_T^*} = z_p,$$

so erhält man den Collectorstrom wieder nach Gl. (39) von [1]. Diesmal interessiert uns jedoch die

Misch-Kreisfrequenz  $\omega_z = \omega_1 - \omega_2$ . Gl. (39) vereinfacht sich zu

$$\frac{i_{c1}}{I_{0C}} = \sum_{i=1}^{n+1} 2 a_i I_1(k_i x) I_1(k_i z_p) \cos(\omega_1 - \omega_2) t \quad (71)$$

und durch Anwendung von Gl. (11) und (26) zu

$$\frac{i_{c1}}{I_{0C}} = x \left[ \left( \beta + \delta \frac{x^2}{8} + \zeta \frac{x^4}{192} + \vartheta \frac{x^6}{9216} + \dots \right) \frac{z_p}{2} + \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} + \vartheta \frac{x^4}{192} + \dots \right) \frac{z_p^3}{16} \right] \cos(\omega_1 - \omega_2) t, \quad (72)$$

wobei  $\beta, \delta, \zeta, \dots$  die in [1] bestimmten reduzierten Ableitungen der Übertragungsfunktion  $i_C = f(u)$  sind.

$I_{0C}$  ist der Collectorgleichstrom im betreffenden Arbeitspunkt. Für  $x < 1$  genügt die zweigliedrige Entwicklung der Besselschen Funktion  $I_1$  vollständig, der Fehler wird kleiner als 1%. Auf die Berechnung für große Werte von  $x$  soll im Abschnitt 4 noch zurückgekommen werden.

Aus Gl. (72) ist ersichtlich, daß der Mischstrom mit zunehmendem  $x$  (Hilfsoszillatorspannung) monoton wächst und für  $q^* \rightarrow 0$  am größten wird, da alle reduzierten Ableitungen gegen eins streben. Dies heißt jedoch wegen

$$q^* = \frac{I_{0C} R_b^*}{\alpha_{fe0} U_T^*}$$

mit  $R_b^* = (R_{bb'} + R_g)(1 + 2\Phi)$ ,

$$U_T^* = U_T(1 + \Phi) = \frac{kT}{e}(1 + \Phi) \quad \text{und} \quad \Phi = g_{ce} R_l,$$

daß  $R_b^*$  und somit auch der Basiszuleitungswiderstand  $R_{bb'}$  möglichst klein sein sollen.

Mit

$$z_p^3 = z^3 (1 + M \cos pt)^3 = z^3 \left[ \left(1 + \frac{3M^2}{2}\right) + \left(3M + \frac{3M^3}{4}\right) \cos pt + \frac{3M^2}{2} \cos 2pt + \frac{M^3}{4} \cos 3pt \right] \quad (73)$$

wird Gl. (72)

$$\begin{aligned} \frac{i_{c1}}{I_{0c}} = \frac{x}{2} \left\{ \left[ \left( \beta + \delta \frac{x^2}{8} \right) z + \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{2 + 3M^2}{16} z^3 \right] + \right. \\ \left. + M \left[ \left( \beta + \delta \frac{x^2}{8} \right) z + \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{12 + 3M^2}{32} z^3 \right] \cos pt + \right. \\ \left. + M^2 \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{z^3}{16} \left( 3 \cos 2pt + \frac{M}{2} \cos 3pt \right) \right\} \cos (\omega_1 - \omega_2) t, \end{aligned} \quad (74)$$

wenn man hier die Entwicklung der Besselschen Funktion nach dem 2. Glied abbricht.

Die Modulationstiefe  $M_1^*$  der Grundkreisfrequenz wird

$$\frac{M_1^*}{M} = \frac{\left( \beta + \delta \frac{x^2}{8} \right) + \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{12 + 3M^2}{32} z^2}{\left( \beta + \delta \frac{x^2}{8} \right) + \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{2 + 3M^2}{16} z^2} \quad (75)$$

und die Änderung der Modulationstiefe

$$\frac{M_1^* - M}{M} = \frac{\left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{8 - 3M^2}{32} z^2}{\left( \beta + \delta \frac{x^2}{8} \right) + \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{2 + 3M^2}{16} z^2}, \quad (76)$$

für  $x \ll 1$  und  $z^2 \ll 1$  gilt

$$\frac{M_1^* - M}{M} = \frac{\delta}{\beta} z^2 \frac{8 - 3M^2}{32}. \quad (76')$$

Weiter kann auch die Verzerrung der Modulation abgelesen werden. Die Modulationstiefe mit der zweifachen Niederfrequenz beträgt

$$\frac{M_2^*}{M} = \frac{\left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{3M}{16} z^2}{\left( \beta + \delta \frac{x^2}{8} \right) + \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{2 + 3M^2}{16} z^2}, \quad (77)$$

für  $x \ll 1$  und  $z^2 \ll 1$  gilt

$$\frac{M_2^*}{M} = \frac{\delta}{\beta} z^2 \frac{3M}{16}. \quad (77')$$

Die Modulationstiefe mit der dreifachen Niederfrequenz ist

$$\frac{M_3^*}{M} = \frac{\left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{M^2}{32} z^2}{\left( \beta + \delta \frac{x^2}{8} \right) + \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} \right) \frac{2 + 3M^2}{16} z^2}, \quad (78)$$

für  $x \ll 1$  und  $z^2 \ll 1$  gilt

$$\frac{M_3^*}{M} = \frac{\delta}{\beta} z^2 \frac{M^2}{32}. \quad (78')$$

Der Gl. (39) können auch die Harmonischen der Misch-Kreisfrequenz  $2\omega_z = 2\omega_1 - 2\omega_2$  und  $3\omega_z = 3\omega_1 - 3\omega_2$  entnommen werden:

$$\frac{i_{c2}}{I_{0c}} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i 2 I_2(k_i x) I_2(k_i z_p) \cos 2(\omega_1 - \omega_2) t \quad (79)$$

und mit Gl. (11) und (22) ergibt sich

$$\frac{i_{c2}}{I_{0c}} = \frac{x^2 z_p^2}{32} \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{12} + \vartheta \frac{x^4}{384} + \dots \right) \cos 2(\omega_1 - \omega_2) t. \quad (80)$$

Für kleine Werte von  $x$  verschwindet die zweite Harmonische für  $\delta = 0$ , d. h.  $1 - 8q + 6q^2 = 0$ . Somit erhält man zwei Nullstellen. Für größere Werte von  $x$  sind mehrere Nullstellen vorhanden.

Bildet man für  $x \ll 1$  aus Gl. (72) und (80) das Verhältnis der Effektivwerte der zweiten und der ersten Harmonischen (Grundharmonischen), so ergibt sich

$$\frac{I_{c2}}{I_{c1}} = \frac{\delta}{\beta} \frac{x z_p}{16}. \quad (81)$$

Die analoge Rechnung für die 3. Harmonische der Misch-Kreisfrequenz führt auf

$$\frac{i_{c3}}{I_{0c}} = \frac{x^3 z_p^3}{1152} \left( \zeta + \vartheta \frac{x^2}{16} + \dots \right) \cos 3(\omega_1 - \omega_2) t. \quad (82)$$

Bei der Mischung kann ebenfalls eine Kreuzmodulation auftreten, wenn außer dem gewünschten Signal noch ein mit der Kreisfrequenz  $s$  modulierte Stör-signal  $u_3 = \hat{U}_3 (1 + M_s \cos st) \sin \omega_3 t$  auftritt. Die gesamte Eingangs-Wechselspannung wird dann

$$u = \hat{U}_1 \sin \omega_1 t + \hat{U}_2 (1 + M \cos pt) \cdot \sin \omega_2 t + \hat{U}_3 (1 + M_s \cos st) \sin \omega_3 t.$$

Wir verwenden die Abkürzungen

$$\frac{\hat{U}_1}{U_T^*} = x, \quad \frac{\hat{U}_2 (1 + M \cos pt)}{U_T^*} = z_p,$$

$$\frac{\hat{U}_3 (1 + M_s \cos st)}{U_T^*} = y_s, \quad \frac{\hat{U}_3}{U_T^*} = y$$

und erhalten aus Gl. (16) jetzt

$$\begin{aligned} \frac{i_c}{I_{0c}} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \exp(k_i x \sin \omega_1 t) \cdot \\ \cdot \exp(k_i z_p \sin \omega_2 t) \exp(k_i y_s \sin \omega_3 t). \end{aligned}$$

Führt man für die Exponentialfunktionen wieder die Entwicklung nach Gl. (7) ein und entnimmt den interessierenden Strom der Kreisfrequenz  $\omega_z = \omega_1 - \omega_2$ , so ergibt sich

$$\frac{i_{c1}}{I_{0c}} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i 2 I_1(k_i x) I_1(k_i z_p) I_0(k_i y_s) \cos (\omega_1 - \omega_2) t \quad (83)$$

und mit Gl. (10), (11) und der Entwicklung

$$y_s^2 = y^2 \left[ \left( 1 + \frac{M_s^2}{2} \right) + 2 M_s \cos st + \frac{M_s^2}{2} \cos 2st \right]$$

für  $z_p^2 \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{i_{c1}}{I_{0C}} = \frac{xz_p}{2} \left\{ \left[ \beta + \delta \frac{y^2}{4} \left( 1 + \frac{M_s^2}{2} \right) + \frac{x^2}{8} \left( \delta + \zeta \frac{y^2}{4} \left( 1 + \frac{M_s^2}{2} \right) \right) + \frac{x^4}{192} \left( \zeta + \vartheta \frac{y^2}{4} \left( 1 + \frac{M_s^2}{2} \right) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{y^2 M_s}{2} \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} + \vartheta \frac{x^4}{192} \right) \left( \cos st + \frac{M_s}{4} \cos 2st \right) \right\} \cos (\omega_1 - \omega_2) t. \end{aligned} \quad (84)$$

Der Kreuzmodulationsgrad wird

$$M_k = \frac{\frac{y^2 M_s}{2} \left( \delta + \zeta \frac{x^2}{8} + \vartheta \frac{x^4}{192} \right)}{\beta + \delta \frac{y^2}{4} \left( 1 + \frac{M_s}{2} \right) + \frac{x^2}{8} \left[ \delta + \zeta \frac{y^2}{4} \left( 1 + \frac{M_s^2}{2} \right) \right] + \frac{x^4}{192} \left[ \zeta + \vartheta \frac{y^2}{4} \left( 1 + \frac{M_s^2}{2} \right) \right]}, \quad (85)$$

und für  $x \ll 1$ ,  $y^2 \ll 1$  gilt

$$M_k = \frac{\delta}{\beta} \frac{y^2 M_s}{2}. \quad (85')$$

Vergleicht man nun die Formeln (76'), (77'), (78'), (81) und (85'), so sieht man, daß für  $x \ll 1$  und  $z^2 \ll 1$  bzw.  $y^2 \ll 1$  die bei der Mischung auftretenden Verzerrungen sehr eng miteinander verknüpft sind und sich im wesentlichen durch das Verhältnis  $\delta/\beta$  ausdrücken lassen. Es genügt also in diesem Fall, einen der Verzerrungseffekte zu messen, um die anderen daraus rechnerisch zu bestimmen.

Führen wir die Abkürzungen

$$S_1 = \frac{I_{0C}}{U_T^*} \left( \beta x + \delta \frac{x^3}{8} + \zeta \frac{x^5}{192} + \vartheta \frac{x^7}{9216} + \dots \right), \quad (86)$$

$$S_3 = \frac{I_{0C}}{U_T^*} \left( \delta x + \zeta \frac{x^3}{8} + \vartheta \frac{x^5}{192} + \dots \right), \quad (87)$$

$$S_5 = \frac{I_{0C}}{U_T^*} \left( \zeta x + \vartheta \frac{x^3}{8} + \dots \right) \quad (88)$$

ein und bezeichnen wir  $S_1, S_3, S_5, \dots$  als „modifizierte Steilheiten“, so lassen sich die früher gerechneten Formeln (76), (77), (78) und (85) für  $z^2 \ll 1$  bzw.  $y^2 \ll 1$  umschreiben:

$$\frac{M_1^* - M}{M} = \frac{S_3}{S_1} z^2 \frac{8 - 3 M^2}{32}, \quad (76'')$$

$$\frac{M_2^*}{M} = \frac{S_3}{S_1} z^2 \frac{3 M}{16}, \quad (77'')$$

$$\frac{M_3^*}{M} = \frac{S_3}{S_1} z^2 \frac{M^2}{32}, \quad (78'')$$

$$M_k = \frac{S_3}{S_1} y^2 \frac{M_s}{2}. \quad (85'')$$

Gl. (72) wird dann zu

$$\begin{aligned} \frac{i_{c1}}{z_p U_T^*} = \frac{1}{2} \left( S_1 + S_3 \frac{z_p^2}{8} + S_5 \frac{z_p^4}{192} + \dots \right) \cdot \\ \cdot \cos (\omega_1 - \omega_2) t. \end{aligned} \quad (72')$$

Der Mischstrom läßt sich also direkt mittels der modifizierten Steilheiten darstellen.

Aus Gl. (80) ergibt sich für  $z_p^2 \ll 1$

$$i_{c2} \approx \frac{x^2 z_p^2}{32} U_T^* S_3 \cos 2(\omega_1 - \omega_2) t \quad (80')$$

und somit

$$\frac{I_{c2}}{I_{c1}} \approx \frac{S_3}{S_1} \frac{x z_p}{16}. \quad (81')$$

Der Vergleich von Gl. (76''), (77''), (78''), (85'') und (81') zeigt, daß die Verzerrungen sich für große Werte von  $x$  durch die modifizierten Steilheiten  $S_3$  und  $S_1$  ausdrücken lassen.

Die hier gefundenen Ergebnisse für Transistoren sind denjenigen, wie sie für Verzerrungen bei Röhren hergeleitet wurden [3], [4], [5], sehr ähnlich.

### 3. Das Entstehen von Pfeiftönen

Durch die Überlagerung von Oberwellen können Störungen des Mischvorganges entstehen, die als „Pfeiftöne“ bezeichnet werden [5].

α) Auch wenn am Eingang nur das Nutzsignal und das frequenzreine Oszillatorsignal vorhanden sind, kann im Collectorstrom außer dem Mischstrom der Kreisfrequenz  $\omega_z = \omega_1 - \omega_2$  ein Signal der Kreisfrequenz  $\omega_z \pm \Delta$  vorhanden sein, das vom nächsten ZF-Filter durchgelassen wird, wenn  $|\pm \Delta| < \approx 2\pi \cdot 5 \text{ kHz}$  ist. Werden die beiden Signale der Kreisfrequenzen  $\omega_z$  und  $\omega_z \pm \Delta$  nach der ZF-Verstärkerstufe gleichgerichtet, so entsteht dabei ein hörbarer Pfeifton der Kreisfrequenz  $\Delta$ .

Eine Kreisfrequenz  $\omega_z \pm \Delta$  kann nun entstehen, wenn die Bedingung

$$\pm m \omega_1 \pm n \omega_2 = \omega_z \pm \Delta \quad (89)$$

erfüllt ist, wobei  $m$  und  $n$  positive ganze Zahlen sind. Daraus ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{\omega_z}{\omega_2} = \frac{m - n}{1 - m} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_z}{\omega_2} = \frac{n - m}{1 + m}, \quad (90)$$

mit denen sich die Werte  $\omega_z/\omega_2$  für beliebige  $m$  und  $n$  tabellieren lassen [5].

Ein Zahlenbeispiel soll das Entstehen eines Pfeiftones erläutern.

Für  $m = 1$  und  $n = 2$  wird  $\omega_z/\omega_2 = 1/2$ . Mit  $\omega_z/2\pi = 468$  kHz und  $\omega_2/2\pi = 938$  kHz wird  $\omega_1/2\pi = 1406$  kHz. Die doppelte Nutzsignalfrequenz mischt nun ebenfalls mit der Hilfsoszillatorfrequenz

$$2 \frac{\omega_2}{2\pi} - \frac{\omega_1}{2\pi} = 2 \cdot 938 - 1406 = 470 \text{ kHz.}$$

Es ist also ein Signal entstanden, dessen Frequenz sich um 2 kHz von der normalen Zwischenfrequenz unterscheidet. Die Größe des Signals bestimmt sich wie die des Nutzsignals aus Gl. (39):

$$\frac{i_c}{I_{OC}} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i 2 I_1(k_i x) I_2(k_i z_p) \sin(2\omega_2 - \omega_1)t, \quad (91)$$

und mit Gl. (11), (12) und (26) ergibt sich

$$\frac{i_c}{I_{OC}} = \left( \gamma x + \varepsilon \frac{x^3}{8} + \eta \frac{x^5}{192} + \dots \right) \frac{z_p^2}{8} \sin(2\omega_2 - \omega_1)t. \quad (92)$$

β) Weitere Pfeiftöne können entstehen, wenn am Eingang außer dem Nutzsignal noch ein einziges oder mehrere Störsignale vorhanden sind oder wenn der Hilfsoszillator keine frequenzreine Spannung liefert. Die Bedingung für das Entstehen der Pfeiftöne lautet dann

$$\pm m \omega_1 \pm n_1 \omega_2 \pm n_2 \omega_3 \pm \dots = \omega_z \pm \Delta, \quad (93)$$

wobei  $\omega_3, \omega_4, \dots$  die Kreisfrequenzen der Störsignale darstellen und  $m, n_1, n_2, \dots$  positive ganze Zahlen sind.

#### 4. Die Mischsteilheit bei großen Signalamplituden

Gehen wir nun nochmals auf Gl. (72) zurück, so schreibt sich die Mischsteilheit  $S_m$  für  $z_p^2 \ll 1$

$$S_m = \frac{S_1}{2} = \frac{I_{OC}}{2 U_T} \left( \beta x + \delta \frac{x^3}{8} + \zeta \frac{x^5}{192} + \vartheta \frac{x^7}{9216} + \dots \right). \quad (94)$$

Für einen Transistor OC 45 mit den charakteristischen Daten

$$R_{bb'} = 75 \Omega, \quad \alpha_{fe0} = 50, \quad g_{ce} = 16,5 \cdot 10^3 I_{OC} \mu A/V,$$

wobei  $I_{OC}$  in Ampère einzusetzen ist, zeigt Bild 1 die Mischsteilheit  $S_m$  für verschiedene Aussteuerungen

$$x_0 = \frac{\hat{U}_1}{U_T}$$

als Funktion des Gleichstrom-Arbeitspunktes ( $I_{OC}$ ). Der reelle Lastwiderstand  $R_l$  wird zu  $0 \Omega$  bzw.  $1,75 \text{ k}\Omega$  angenommen, was mit  $\Phi = g_{ce} R_l$  auf  $\Phi = 0$  und  $\Phi = 28,9 I_{OC}$  führt. Der Wert von  $q$  wird  $q = \frac{R_{bb'} I_{OC}}{\alpha_{fe0} U_T} = 57,8 I_{OC}$ , wobei  $I_{OC}$  in Ampère einzusetzen ist. Für  $R_l = 1,75 \text{ k}\Omega$  ergibt sich gerade  $\Phi = q/2$ . Der Generatorinnenwiderstand wird zu  $R_g = 0$  angenommen. Aus Bild 1 ist ersichtlich, daß die Mischsteilheit ein Maximum besitzt, dessen Wert mit steigendem  $R_l$  abnimmt und sich zugleich nach

kleineren Werten von  $I_{OC}$  verschiebt. Für Werte von  $x \geq 3$  wird die Auswertung von Gl. (94) bereits ungenau, da die Reihe schlecht konvergiert.

Will man die Berechnung für größere Werte von  $R_l$  durchführen, so ist die Bedingung  $\Phi \ll 1$  nicht mehr erfüllt und die approximative Integration von Gl. (53) in [1], auf der obige Rechnung basiert, nicht mehr erlaubt. Die Stromabhängigkeit von  $\Phi$  muß im Integral berücksichtigt werden. Die Rech-

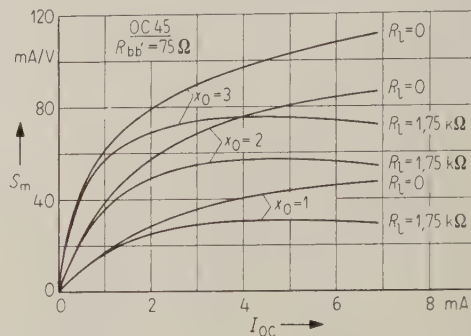


Bild 1. Die Mischsteilheit  $S_m$  als Funktion des Collectorgleichstromes mit  $x_0$  und  $R_l$  als Parameter;

$$x_0 = \frac{\hat{U}_1}{U_T}, \quad x = \frac{\hat{U}_1}{U_T(1 + \Phi)};$$

$$R_l = 0, \quad \Phi = 0; \quad R_l = 1,75 \text{ k}\Omega, \quad \Phi = 28,9 I_{OC}.$$

nung und die daraus folgenden Ergebnisse für große Werte von  $R_l$  sollen jedoch an anderer Stelle publiziert werden. Ist in Serie zu  $R_{bb'}$  ein Widerstand  $R_z$  von z. B.  $100 \Omega$  vorhanden, so nimmt die Mischsteilheit sehr stark ab. In Bild 2 sind die Steilheitskurven für verschiedene Werte von  $x$  für  $R_b = R_{bb'} = 75 \Omega$  sowie  $R_b = R_{bb'} + R_z = 75 \Omega + 100 \Omega = 175 \Omega$  bei  $R_l = 0$  aufgetragen. Man sieht daraus, daß Transistoren in Mischstufen also unbedingt kleine Basiszuleitungswiderstände besitzen sollten.

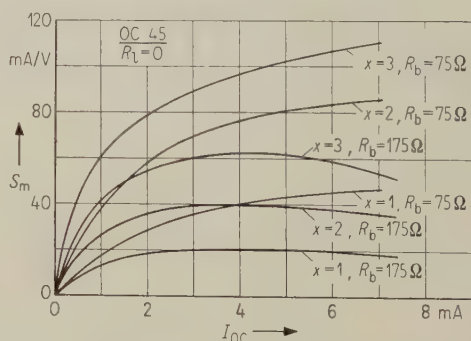


Bild 2. Die Mischsteilheit  $S_m$  als Funktion des Collectorgleichstromes mit  $x$  und  $R_b$  als Parameter;

$$x = x_0 = \hat{U}_1/U_T.$$

Die Kurven der Bilder 1 und 2 sind nun aber nur von theoretischem Interesse, da sie nichts darüber aussagen, welche Aussteuerungen  $x$  bei verschiedenen Arbeitspunkten und Betriebsbedingungen erlaubt sind. Meistens wird für einen Transistor ein maximaler Collectorstrom  $i_{C \max}$  vorgeschrieben und

die Spannung des Hilfsoszillators (und somit  $x$ ) gerade so gewählt, daß dieser Wert erreicht, aber nicht überschritten wird. Wählt man beispielsweise für einen Transistor OC 45  $i_{C\max} = 5$  mA, so lassen sich für jeden Arbeitspunkt ( $I_{OC}$ ) der Wert  $x$  und somit die Mischsteilheit bestimmen. Das Vorgehen ist dabei das folgende:

Für einen beliebigen Wert von  $q_1^*$  berechnet sich  $I_{OC1}$  aus

$$q^* = \frac{R_b I_{OC}}{\alpha_{fe0} U_T} \frac{1 + 2\Phi}{1 + \Phi} \quad (95)$$

zu

$$I_{OC1} = q^* \frac{\alpha_{fe0} U_T}{R_b} \frac{1 + \Phi}{1 + 2\Phi} \quad (96)$$

Bezeichnet man das zu  $I_{OC} = i_{C\max}$  gehörende  $q^*$  mit  $q_{\max}^*$ , so ergibt sich die erlaubte Aussteuerung  $x_1$  zu

$$x_1 = \ln \frac{i_{C\max}}{I_{OC1}} + (q_{\max}^* - q_1^*), \quad (97)$$

wie aus der in [1] hergeleiteten Formel (57)

$$\frac{i_C}{I_{OC}} = \exp \left( \frac{u - \frac{R_b^* i_C}{\alpha_{fe0}}}{U_T^*} \right) \quad (57)$$

leicht abgeleitet werden kann.

Mit Gl. (94) und den in [1] berechneten und graphisch aufgetragenen reduzierten Ableitungen erhält man nun die gesuchte Mischsteilheit  $S_m$ .

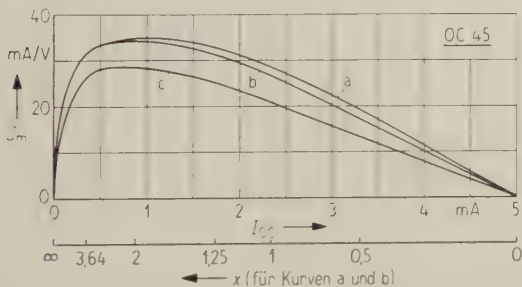


Bild 3. Die Mischsteilheit  $S_m$  bei optimaler Aussteuerung bei einem maximalen Collectorstrom  $i_{C\max} = 5$  mA;

$$x_0 = \frac{\hat{U}_1}{U_T}, \quad x = \frac{\hat{U}_1}{U_T(1 + \Phi)}.$$

Kurve a:  $R_b = 75 \Omega$ ,  $R_l = 0$ ,  $\Phi = 0$ ,

Kurve b:  $R_b = 75 \Omega$ ,  $R_l = 1,75 \text{ k}\Omega$ ,  $\Phi = 23,9 I_{OC}$ ,

Kurve c:  $R_b = 75 \Omega + 100 \Omega$ ,  $R_l = 0$ ,  $\Phi = 0$ .

In Bild 3 sind die Steilheitskurven als Funktion von  $I_{OC}$  für drei verschiedene Betriebsbedingungen aufgetragen. Die Mischsteilheit durchläuft dabei ein Maximum in der Nähe von  $I_{OC} = 1$  mA, dessen Wert sich mit steigendem  $R_b$  und  $R_l$  verringert und zugleich nach kleineren Werten von  $I_{OC}$  verschiebt.

Die Auswertung von Gl. (94) ist wegen der hohen Potenzen von  $x$  ziemlich zeitraubend. Es besteht aber die Möglichkeit, eine gute Approximation einzuführen.

Die von uns gewählte Annäherung der Übertragungsfunktion  $i_C/I_{OC} = f(x)$  mittels Exponen-

tialfunktionen läßt sich auch als Taylor-Reihe umschreiben:

$$\frac{i_C}{I_{OC}} = P_n(x) = 1 + \alpha x + \beta \frac{x^2}{2} + \gamma \frac{x^3}{6} + \delta \frac{x^4}{24} + \varepsilon \frac{x^5}{120} + \zeta \frac{x^6}{720} + \eta \frac{x^7}{5040} + \vartheta \frac{x^8}{40320} + \dots \quad (98)$$

Wollen wir beispielsweise dieses Polynom  $P_8(x)$  vom 8. Grad in  $x$  durch ein anderes Polynom  $P_7(x)$  vom 7. Grad in  $x$  annähern, so entwickeln wir  $P_8(x)$  zuerst nach Tschebyscheffschen Polynomen („Telescoping“) [6], [7]. Die beste Approximation (im Sinne der sogenannten Banach-Metrik) eines Polynoms  $n$ -ten Grades  $P_n(x)$  durch ein Polynom  $(n-1)$ -ten Grades  $P_{n-1}(x)$  entsteht, wenn man in der Tschebyscheffschen Entwicklung von  $P_n(x)$  das letzte Glied wegläßt. Auf diese Weise erhalten wir nun aus Gl. (86) ein Polynom 7. Grades  $P_7(x)$  und auf gleiche Art kann dieses weiter auf  $P_6(x)$  und letzteres auf  $P_5(x)$  reduziert werden.

Wir wollen die Rechnung hier nicht weiter ausführen, sondern nur das Ergebnis anschreiben, das im Gebiet  $-4 \leq x \leq +4$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{i_C}{I_{OC}} = P_5(x) = & \left( 1 + \frac{8}{45} \zeta + \frac{4}{45} \vartheta \right) + \\ & + \left( \alpha + \frac{4}{45} \eta \right) x + \left( \beta - \frac{2}{5} \zeta - \frac{64}{315} \vartheta \right) \frac{x^2}{2} + \\ & + \left( \gamma - \frac{4}{15} \eta \right) \frac{x^3}{6} + \\ & + \left( \delta + \frac{4}{5} \zeta + \frac{4}{15} \vartheta \right) \frac{x^4}{24} + \left( \varepsilon + \frac{2}{3} \eta \right) \frac{x^5}{120}. \end{aligned} \quad (99)$$

Wie man sieht, sind die Klammerausdrücke

$$\left( 1 + \frac{8}{45} \zeta + \frac{4}{45} \vartheta \right)$$

usw. an Stelle der Koeffizienten 1,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  usw. getreten. Letztere können nun im Ausdruck (94) für die Mischsteilheit einfach durch die Klammerausdrücke ersetzt werden, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} S_m = \frac{I_{OC}}{2 U_T^*} \left( \beta - \frac{2}{5} \zeta - \frac{64}{315} \vartheta \right) x + \\ + \left( \delta + \frac{4}{5} \zeta + \frac{4}{15} \vartheta \right) \frac{x^3}{8}. \end{aligned} \quad (100)$$

Dies ist nur noch ein Polynom 3. Grades in  $x$  und liefert im Gebiet  $1,25 < x < 4$  eine gute Annäherung für die Mischsteilheit. Für  $x < 1,25$  genügen die beiden ersten Terme von Gl. (94)

$$S_m = \frac{I_{OC}}{2 U_T^*} \left( \beta x + \delta \frac{x^3}{8} \right). \quad (101)$$

In Bild 4 sind die nach Gl. (94) und (100) gerechneten Steilheitskurven für  $R_b = 75 \Omega$  und  $R_l = 0$  vergleichsweise aufgetragen. Man sieht, daß die Übereinstimmung für  $1,25 < x < 3,64$  gut ist. Vorteilhaft ist die angenäherte Berechnungsweise dann, wenn mehrere Kurven zu bestimmen sind und die Stützwerte  $q^*$  immer gleich gewählt werden, so daß die Klammerausdrücke nur einmal zu rechnen sind.

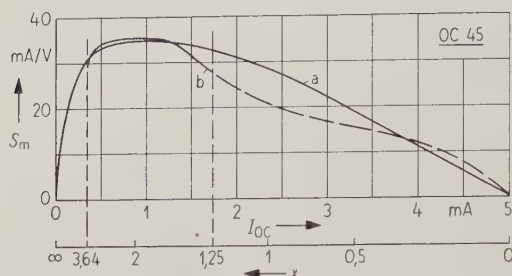


Bild 4. Exakte (Kurve a) und approximative Bestimmung (Kurve b) der Mischteilheit bei optimaler Aussteuerung bei einem maximalen Collectorstrom  $i_{C\max} = 5 \text{ mA}$  ( $R_b = 75 \Omega$ ,  $R_l = 0$ ).

### 5. Die Mischung über zwei Stufen

Schaltet man zwei Transistorstufen in Kaskade, ohne daß man dazwischen ein Filter einfügt, so ist es interessant zu beobachten, wie sich der Mischstrom verhält (siehe auch [1]).

Die der Gl. (72) entsprechende Formel für den Collectorstrom des zweiten Transistors lautet für  $z^2 \ll 1$

$$\frac{i_{c2}}{I_{OC2}} = -\frac{l x z_p}{2} \left[ (\alpha_2 \beta_1 + l \alpha_1^2 \beta_2) + (\alpha_2 \delta_1 + 3 l \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 + 3 l^2 \alpha_1^2 \beta_1 \gamma_2 + l^3 \alpha_1^3 \delta_2) \frac{x^2}{8} \right] \cos(\omega_1 - \omega_2)t, \quad (102)$$

wobei  $l = R_l I_{OC1} / U_T$  ist.

Befindet sich nach dem ersten Transistor ein Filter, das auf  $\omega_z = \omega_1 - \omega_2$  abgestimmt ist, so wird

$$\frac{i_{c2}}{I_{OC2}} = -\frac{l x z_p}{2} \left[ \alpha_2 \beta_1 + (\alpha_2 \delta_1) \frac{x^2}{8} \right] \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (103)$$

Der Mischstrom ist also kleiner, man erhält nur die in Gl. (102) unterstrichenen Glieder.

### 6. Schlußbetrachtung

Mit Hilfe von Besselschen Funktionen ist es gelungen, den Mischvorgang und die dabei auftretenden Verzerrungserscheinungen bei tiefen Frequenzen zu bestimmen. Für höhere Frequenzen muß von Gl. (68) in [1] ausgegangen werden.

Zusammen mit Messungen bei verschiedenen Frequenzen (siehe auch [8]) soll die Erweiterung auf höhere Frequenzen in einer folgenden Arbeit publiziert werden.

#### Schrifttum

- [1] VOGEL, J. S. und STRUTT, M. J. O., Berechnung der Verzerrungs- und Störeffekte bei Transistor-Verstärkerstufen auf Grund des Ersatzschaltbildes. A.E.Ü. **14** [1960], 397–405.
- [2] BENEKING, H., Ein Transistor-Mischer-Ersatzschaltbild. A.E.Ü. **13** [1959], 313–319.
- [3] STRUTT, M. J. O., Verzerrungseffekte bei Mischröhren. Hochfrequenztech. u. Elektroakustik **49** [1937], 20–23.
- [4] STRUTT, M. J. O., Elektronenröhren. Springer-Verlag, Berlin 1957.
- [5] STRUTT, M. J. O., Verstärker und Empfänger. Springer-Verlag, Berlin 1951.
- [6] ACHESER, N. I., Approximationstheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1953.
- [7] STIEFEL, E., Über diskrete und lineare Tschebyscheffapproximationen. Z. num. Math. **1** [1959], 1–28.
- [8] MINNER, W., Die Steilheit des HF-Legierungs- und Drifttransistors als Funktion der Frequenz und des Arbeitspunktes. A.E.Ü. **14** [1960], 411–420.

## BUCHBESPRECHUNGEN

**J. Dosse, Der Transistor**, ein neues Verstärkungselement. 3. verbesserte und erweiterte Auflage. R. Oldenbourg Verlag, München 1959, 274 Seiten, 152 Bilder, 8 Farbtafeln, 16 cm × 24 cm, Ganzleinen DM 26,—.

Die beste Empfehlung dieses Buches besteht wohl darin, daß in einem Zeitraum von etwa vier Jahren insgesamt drei Auflagen erschienen sind. Die Darstellung setzt sehr wenige Vorkenntnisse voraus. Die Bilder, namentlich die farbigen, sind sehr schön ausgeführt und unterstützen den klaren Text auf das Beste. Gegenüber den vorigen Auflagen ist die jetzige erheblich erweitert worden. Die behandelten Gegenstände gehen aus folgenden Kapitelüberschriften hervor:

1. Vorgeschichte,
2. Wirkungsweise,
3. Entwicklungsformen,
4. Technische Eigenschaften,
5. Schaltungen mit Transistoren,
6. Formelzeichen und Zählpfeile,
7. Schrifttum,
8. Sachverzeichnis.

Die Behandlung ist flüssig und beschränkt sich stets auf das Wesentliche. Es ist dabei erstaunlich, wieviel auf so wenig Seiten behandelt werden konnte. Eine sehr ausführliche Schrifttumsliste erlaubt das weitere Eindringen in die einzelnen Gegenstände. Die Formelzeichen sind in einem Verzeichnis am Schluß aufgeführt worden. Das Buch bildet für jeden Benutzer von Transistoren ein fast unentbehrliches Hilfsmittel.

M. STRUTT

**A. K. Jonscher, Principles of semiconductor device operation**. Verlag G. Bell & Sons Ltd., London 1960, VIII, 168 Seiten, zahlr. Bilder, 15 cm × 22,5 cm, Ganzleinen sh 30/—.

Dieses Buch ist aus einer Vorlesung entstanden. Es ist in erster Linie für jene bestimmt, welche ein besseres Verständnis der Vorgänge in Halbleiteranwendungen zu erlangen wünschen. Es handelt sich dabei namentlich um alle Vorgänge, welche mit dem Trägertransport in Halbleitern zusammenhängen. Die Kapitel sind:

1. Outline of semiconductor theory.
2. Non-equilibrium carrier densities.
3. Transport of excess carrier densities in a homogeneous medium.
4. Theory of p-n-junctions and junction diodes.
5. Theory of multi-junction structures.
6. Carrier flow in inhomogeneous media.

Der Text wird durch deutliche Abbildungen bestens unterstützt. Gerade die hier behandelten Transportvorgänge, welche für das Verständnis der Wirkungsweise von Transistoren wesentlich sind, fehlen meistens ganz oder teilweise in anderen Büchern über Halbleiter und Transistoren. Die Behandlung ist flüssig und klar und enthält alle für die genannten Vorgänge wesentlichen Punkte. Das Buch sei jedem, der tiefer in das Verständnis der Wirkungsweise von Transistoren einzudringen wünscht, wärmstens empfohlen. Die Vorkenntnisse entsprechen etwa den unteren Semestern unserer Hochschulen.

M. STRUTT

sind nicht ideal, die Nebenabsorptionen, das sind Absorptionen der beiden anderen Farbstoffe im Bereich maximaler Absorption des dritten, können nicht vernachlässigt werden (Bild 3)<sup>1</sup>. Wenn also der Meßfehler möglichst klein bleiben soll, so ist die Dichtemessung nur in einem sehr schmalen Spektralbereich vorzunehmen und zwar bei der maximalen Absorption des betreffenden Farbstoffes. Das entspricht bei photographischer Umkehrung einem Kopieren mit Spektrallichtern.

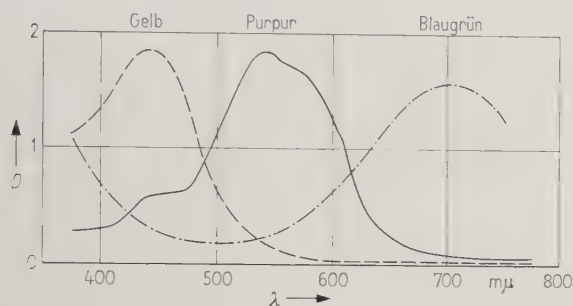


Bild 3. Absorptionskurven der Negativfarbstoffe.

Diese Forderung stößt aber andererseits auf apparative Schwierigkeiten, denn ein sehr schmaler Spektralbereich kann nur durch starke Filterung des intensitätsbegrenzten Abtastlichtes erzielt werden. Dieses und die Tatsache des schmalen Spektralbereiches an sich vermindern den effektiven Lichtstrom so stark, daß ein Signal der Photozelle in deren Störpegel (Rauschen) verschwinden würde. Es muß daher ein Kompromiß zwischen möglichst schmalen Spektralbereich und gutem Signal-Rauschverhältnis geschlossen werden [29]. Das elektronische Maskenverfahren, welches dem oben erwähnten photographischen Maskenverfahren gleicht, gestattet es, die durch Nebenabsorptionen bedingten Fehler zu vermindern [16], [22], [24], [31].

In jedem der drei Meßkanäle treten außer der zu messenden Größe noch zwei unerwünschte Werte auf, bedingt durch die Nebendichten der anderen Farbstoffe. Elektrisch ist das als Übersprechen zwischen den Kanälen zu werten, welches, soweit lineare Verhältnisse vorliegen, mit Hilfe eines Netzwerkes beseitigt werden kann. Die Koeffizienten dieses Matrix-Netzwerkes berechnet man zweckmäßigerweise aus den gegebenen Sollwerten und den gemessenen Werten.

Zunächst werden mit Hilfe eines Densitometers, dessen spektrale Empfindlichkeit mit der des zu verwendenden Abtasters übereinstimmen muß, die Negativdichten von möglichst vielen, unter Normalbedingungen photographierten Testfarben bei den drei Absorptionsmaxima gemessen und in  $\gamma$ -korrigierte, elektrische Signale  $R$ ,  $G$  und  $B$  (rot, grün und blau) umgeformt. Weiterhin werden aus den Normfarbwerten der Testfarben und den Wiedergabeprimärvalenzen unter Berücksichtigung der Steuerkennlinie der Wiedergaberöhre die Sollwerte  $R'$ ,  $G'$  und  $B'$  ermittelt. Dann gilt

$$\begin{aligned} R' &= a_{11} R + a_{12} G + a_{13} B, \\ G' &= a_{21} R + a_{22} G + a_{23} B, \\ B' &= a_{31} R + a_{32} G + a_{33} B. \end{aligned} \quad (23)$$

Wie oben erwähnt, soll immer die Bedingung für einwandfreie Unbuntwiedergabe erfüllt sein, d. h., sind die drei Signale  $R$ ,  $G$  und  $B$  gleich groß, so muß die Maske verschwinden. Damit ergibt sich die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= 1, \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} &= 1, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (24)$$

und in Gl. (23) eingesetzt

$$\begin{aligned} R' - R &= a_{12}(G - R) + a_{13}(B - R), \\ G' - G &= a_{21}(R - G) + a_{23}(B - G), \\ B' - B &= a_{31}(R - B) + a_{32}(G - B). \end{aligned} \quad (25)$$

Da Gl. (25) streng nur für zwei Farbvalenzen erfüllbar ist, werden Näherungswerte der Koeffizienten  $a_{ik}$ ,  $i \neq k$ , für möglichst viele Testfarben bestimmt.

Zur Auswertung von Gl. (25) hat sich ein graphisches Verfahren bewährt: Die prozentuale Abweichung der wirklichen Maskenausgangssignale  $R''$ ,  $G''$  und  $B''$  von den Sollwerten  $R'$ ,  $G'$  und  $B'$  werden mit je einem Koeffizienten als Parameter aufgetragen und die  $a_{ik}$  so bestimmt, daß die Fehler in allen drei Kanälen möglichst klein und vor allem gleich sind. Dabei kann zwar die Wiedergabehelligkeit beträchtliche Abweichungen vom Sollwert aufweisen, was aber gegenüber Farbfehlern geringere Bedeutung hat. Die  $a_{ik}$ ,  $i = k$ , ergeben sich aus Gl. (24). Ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Maskenkoeffizienten [25] ist hier nicht anwendbar, weil dabei die elektronische Maske vor der  $\gamma$ -Korrektur eingeschaltet ist, es also keine Möglichkeit offen läßt, die bei einer eventuellen Kompression des Filmkontrastes auftretenden Farbverzerrungen auszugleichen.

### 3.2. Die Abtasteinrichtung

Zur Abtastung der Farbnegative wurde ein Lichtpunktastaster entwickelt, bei dem in üblicher Weise das Abtastlicht nach Passieren des Negativs optisch in drei Kanäle aufgespalten und Photovervielfachern zugeführt wird.

Die Anlage arbeitet mit 625 Zeilen und einfachem Zeilensprung, Bild 4 zeigt das gesamte Blockschaltbild. (Es ist nur der Grün-Kanal vollständig gezeichnet.)

Die spektralen Empfindlichkeiten der einzelnen Kanäle werden mit Zusatzfiltern so korrigiert, daß ihre Maxima mit denen der Farbstoffabsorptionen etwa übereinstimmen (Bild 5).

Als Abtaströhre wurde die Röhre RCA 5 AUP 24 und als Photovervielfacher die Röhren RCA 5819 für den Blaukanal und RCA 6217 für den Grün- bzw. Rotkanal benutzt. Aus den Spektralfunktionen (Bild 6) ist ersichtlich, daß der Rotkanal im Hinblick auf möglichst großes Signal am meisten benachteiligt ist, da sowohl die Abtaströhre als auch der Photovervielfacher im Rotbereich geringe Strahlung bzw. Empfindlichkeit haben [27].

<sup>1</sup> Die Absorptionskurven wurden freundlicherweise von der Fa. AGFA AG, Leverkusen, zur Verfügung gestellt.

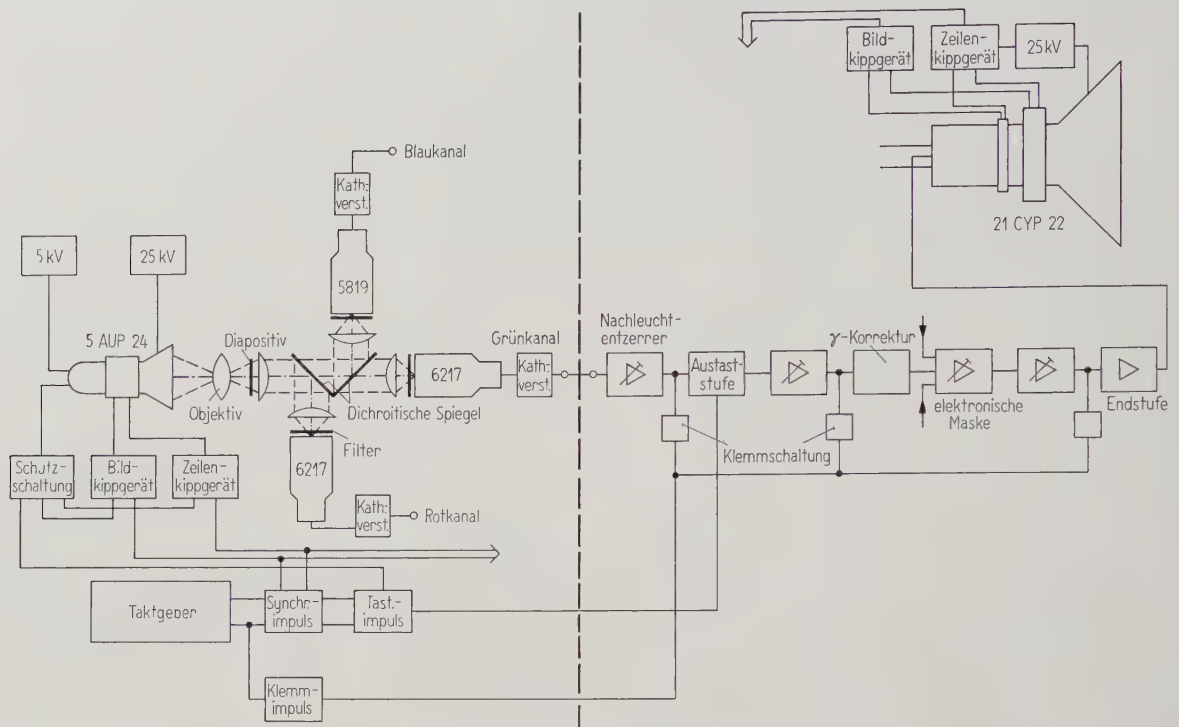


Bild 4. Blockschaltbild der Umkehrungsanlage.

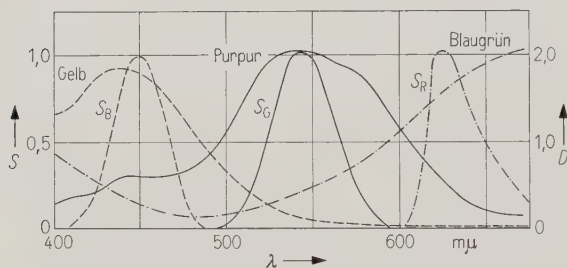


Bild 5. Spektrale Empfindlichkeit der Kanäle.

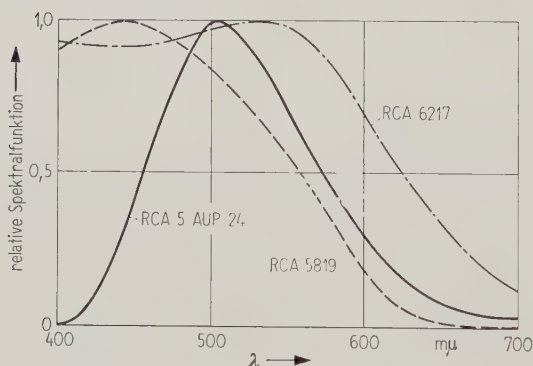


Bild 6. Spektralfunktion der Abströhre und der Photovervielfacher.

Als Korrekturfilter dienten Kombinationen von AGFA-Reprofilern und Glasfiltern der Fa. Schott & Gen.

Eine Regelung der Dynodenspannungen der Vervielfacher gestattet eine frequenzunabhängige Regelung der Kanalempfindlichkeit bei jeweils bestem Störabstand.

### 3.3. Die Wiedergaberöhre und die Übertragungskanäle

Die Farbwiedergabe erfolgt additiv mit einer Farbfernsehröhre RCA 21 CYP 22 (shadow-mask tube). Durch die auf ihrem Schirm aufgetragenen Phosphore sind die Wiedergabeprimärvalenzen gegeben. Ihre Normfarbwertanteile sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,670, \quad y_1 = 0,330 \text{ (Rotkanal)}, \\ x_2 &= 0,210, \quad y_2 = 0,710 \text{ (Grünkanal)}, \\ x_3 &= 0,140, \quad y_3 = 0,080 \text{ (Blaukanal)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Obwohl die mit diesen Primärvalenzen ermischnbaren Farben — sie liegen innerhalb des von ihnen in der Farbtabelle gebildeten Dreiecks — nicht alle vorkommenden Farbvalenzen umfassen, zeigt ein Vergleich mit dem Farbumfang der üblichen Filme eine gute Übereinstimmung [25] (Bild 7).

Es ist zweckmäßig, zur Berechnung der Signale nach Abschnitt 3.1 vom Normvalenzsystem zu einem RGB-System überzugehen, bei dem die Primärvalenzen die Farbvalenzen der Bildröhrenphosphore sind. Aus Gl. (26) und der Bedingung, daß Gleichenergieweiß in beiden Systemen als Bezugsweiß gilt, ergeben sich die Transformationsgleichungen ( $R^*, G^*, B^*$  wegen  $\gamma_w = 1$ ):

$$\begin{aligned} X &= 0,6610 R^* + 0,1713 G^* + 0,1677 B^*, \\ Y &= 0,3256 R^* + 0,5786 G^* + 0,0965 B^*, \\ Z &= 0,0000 R^* + 0,0654 G^* + 0,9346 B^* \end{aligned} \quad (27)$$

und für den Übergang vom Normvalenzsystem zum RGB-System:

$$\begin{aligned} R^* &= 1,7539 X - 0,4894 Y - 0,2645 Z, \\ G^* &= -0,9986 X + 2,0271 Y - 0,0286 Z, \\ B^* &= 0,0699 X - 0,1419 Y + 1,0720 Z. \end{aligned} \quad (28)$$

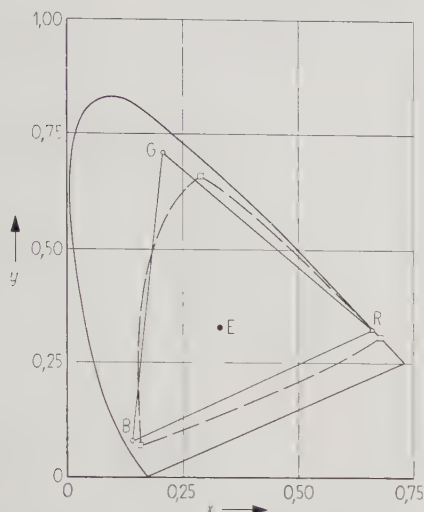


Bild 7. Normfarbtafel mit Spektralfarbenzug, Wiedergabe-Primärvalenzen  $R, G, B$  im Vergleich zum Farbumfang eines Filmes; — Röhre RCA 21 CYP 22, — — — Farbfilm.

Der Hellbezugswert ist wieder durch den Normfarbwert  $Y$  gegeben.  $Y$  schreibt auch vor, wie sich die Leuchtdichten der Schirmfarben bei Wiedergabe von Unbunt verhalten müssen:

$$B_R : B_G : B_B = 32,56 : 57,86 : 9,56. \quad (29)$$

Dieses Leuchtdichte-verhältnis soll aber nach Abschnitt 3.1 bei gleich großen Eingangssignalen erzeugt werden. Eine Messung<sup>2</sup> der Leuchtdichten pro mA Strahlstrom ergab die Werte für

$$\begin{aligned} \text{Rot: } B'_R &= 53,8 \text{ asb/mA}, \\ \text{Grün: } B'_G &= 278 \text{ asb/mA}, \\ \text{Blau: } B'_B &= 59,3 \text{ asb/mA} \end{aligned}$$

bis zu Strahlströmen von etwa 0,5 mA.

Ohne Korrekturmaßnahmen verhalten sich die Leuchtdichten bei gleichen Eingangssignalen wie

$$B'_R : B'_G : B'_B = 53,8 : 278 : 59,3 = 1 : 5,17 : 1,11. \quad (30)$$

Die Signalverstärker vor der Bildröhre erhalten zum Ausgleich verschiedene Verstärkungsgrade, die sich wie

$$\begin{aligned} V_R : V_G : V_B &= \left( \frac{B_R}{B'_R} \right)^{1/\gamma_w} : \left( \frac{B_G}{B'_G} \right)^{1/\gamma_w} : \left( \frac{B_B}{B'_B} \right)^{1/\gamma_w} = \\ &= 1,88 : 1,12 : 1,00 \end{aligned} \quad (31)$$

verhalten. Damit ist Gl. (29) erfüllt.

Durch Einstellen der Steuergitter- und Schirmgitterspannungen der einzelnen Strahlssysteme muß dafür gesorgt werden, daß Gl. (29) für alle Werte der Wiedergabeleuchtdichte gilt, z. B. müssen die Schirmgitter- und die negative Steuergitterspannung im Rotkanal am größten sein.

Die Übertragungskanäle weisen im übrigen keine Besonderheiten auf. Direkt an die Photovervielfacher angebaut sorgen Kathodenverstärker für

<sup>2</sup> Die Meßwerte wurden im Institut für Hochfrequenz- und Fernmeldetechnik der Technischen Hochschule Braunschweig, Direktor Prof. Dr.-Ing. F. KIRSCHSTEIN, aufgenommen und freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

eine breitbandige Kabelanpassung. Die ersten Stufen der Hauptverstärker sind so ausgelegt, daß das Schirmnachleuchten der Abströhre kompensiert wird. In den folgenden Stufen werden die Signale verstärkt und ausgetastet. Die anschließende  $\gamma$ -Korrekturstufe benötigt eine Eingangsspannung von etwa 10 V, ihr  $\gamma$ -Wert ist in kleinen Grenzen regelbar (Bild 8). Zur Umkehrung vom Negativ zum Positiv muß die  $\gamma$ -Stufe eine Kennlinie mit negativem Exponenten haben (Gl. (21)), was sich in erster Näherung durch eine anschließende Phasenumkehrstufe erreichen läßt [28].

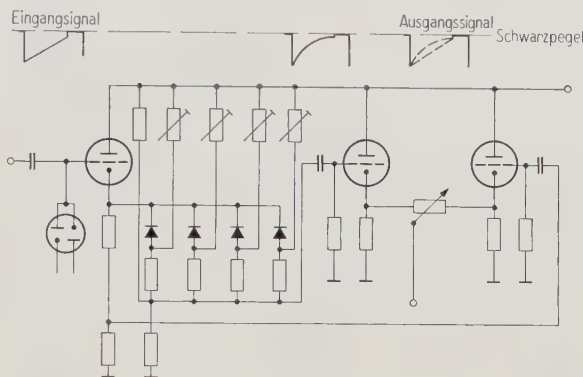


Bild 8.  $\gamma$ -Korrekturstufe.

Dem so in seiner Amplitude verzerrten Signal werden dann in der folgenden Maskenstufe bestimmte Signalanteile der beiden anderen Kanäle zugemischt.

Zur Einstellung bester Wiedergabegüte müssen die Zusatzsignale getrennt in ihren Amplituden regelbar sein, da die Koeffizienten  $a_{ik}$  je nach Film und Aufnahmebedingungen unterschiedlich sein können. Weiterhin darf die Graubedingung nicht gestört werden, d. h., wenn die Werte der  $a_{ik}$  verändert werden, muß Gl. (24) immer gewahrt bleiben.

Eine Umformung von Gl. (25), hier nur für den Rotkanal durchgeführt, bringt

$$R' = R + [(a_{11} - 1) R + a_{12} G + a_{13} B] \quad (32)$$

oder, was bei entsprechender Wahl der Konstanten  $K_{ik}$  dasselbe ist,

$$R' = R + K_1 [K_{11} R + K_{14} (K_{12} G + K_{13} B)]. \quad (33)$$

Hält man  $K_{12} + K_{13}$  konstant, so kann  $K_{14}$  einmalig so eingestellt werden, daß

$$K_{11} + K_{14} (K_{12} + K_{13}) = 0 \quad (34)$$

wird. Die in Bild 9 gezeigte Schaltung erfüllt diese

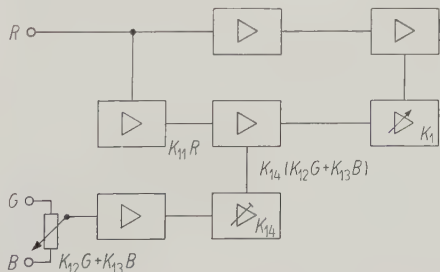


Bild 9. Blockschaltbild der Maskenstufe.

Forderung. Andere Maskenschaltungen mit mechanischen Verkopplungen der Einstellregler gehen von Gl. (25) direkt aus [31].

#### 4. Einstellung der Übertragungskanäle und Meßergebnisse

Bei den folgenden Angaben und Rechnungen wurden einige vereinfachte Annahmen gemacht:

1. Bezugsweiß ist immer Gleichenergieweiß. (Normlichtart E, Bild 7). Für die Praxis ist es unter Umständen vorteilhafter, auf eine andere Normlichtart überzugehen.
2. Das Gamma des Negativmaterials ist einheitlich  $\gamma_N = 0,75$ .
3. Es wird nur auf ein Gesamtgamma von eins kompensiert, der Kontrast nicht komprimiert.

##### 4.1. Einstellung der Übertragungskanäle

Die Einstellung der Kanäle erfolgt zunächst bei abgeschalteten  $\gamma$ -Stufen und Klemmstufen. Bei der Vielzahl der Funktionen müssen die Verstärkungen der einzelnen Stufen in allen drei Kanälen gleich sein. Röhren- und Bauelementestreuungen werden durch regelbare Gegenkopplungen ausgeglichen. Die Bandbreiten der Verstärker sind unterschiedlich und liegen im Grün- und Blaukanal bei 3,5 MHz und im Rotkanal wegen des hohen Rauschpegels bei etwa 2,5 MHz.

Sind die Kanäle eingepegelt, so können die  $\gamma$ -Stufen mit Hilfe eines linear ansteigenden Eingangssignals oszillographisch eingestellt werden, indem die Istkurve mit einer vor dem Oszillographenschirm angebrachten Sollkurve verglichen wird. Ein Elektronenschalter erleichtert den Vergleich zwischen den einzelnen Kanälen. Die Bilder 10 und 11 zeigen Eingangs- und Ausgangssignal der  $\gamma$ -Stufe.

Die Verstärkungsgrade der Endstufen, vgl. Gl. (31), sind schwach regelbar, um den genauen Graubgleich der Bildröhre vornehmen zu können.

Die Konvergenz wurde mit den zur Bildröhre passenden Schaltelementen erreicht.

##### 4.2. Meßergebnisse

Als Testfarben dienten neun verschiedene Aufstrichfarben, die unter Normalbedingungen photographiert wurden.

Aus den spektralen Remissionsfunktionen wurden mit Hilfe der Auswahlordinaten [4] unter Berücksichtigung des Aufnahmelichtes die erforderlichen Eingangssignale der Endverstärker bestimmt (Gl. (28)). Bezugswert ist der Hellbezugswert für Gleichenergieweiß  $Y = 100$ . Der Abtaster, nach Vor-

abgleich auf gleiche Ausgangssignale bei unbelichtetem Film, lieferte, als Densitometer benutzt, die Dichtewerte der Testfarbennegative bzw. proportionale elektrische Signale. Meßfehler können bei diesem Verfahren besonders wegen des geringen Störabstandes im Rotkanal auftreten.

Der benutzte Film hatte unbelichtet eine Minimaldichte von  $D_{\min} = 0,6$  und eine maximale Unbuntichte von  $D_{\max} = 2,2$ . Unter der Annahme, daß ein maximal geschwärzter Film bei Abtastung auf der Wiedergabeseite größte Helligkeit ( $Y = 100$ ) hervorrufen soll, können die wirklichen Eingangssignale der Maskenstufen bestimmt werden und in Verbindung mit den errechneten Sollwerten am Ausgang der Stufen auch die Koeffizienten  $a_{ik}$ .

Die Wiedergabe der Testfarben ohne Maske zeigt einen eindeutigen Blaustich (Bilder 12 und 13). Es ist daher zunächst erforderlich, diese lineare Farbverzerrung durch Regeln der Kanalempfindlichkeit (Dynodenregelung) so zu korrigieren, daß die graue

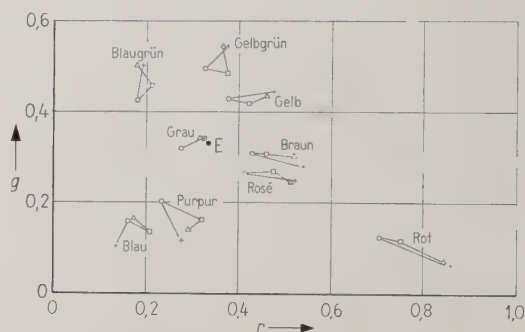


Bild 12. RGB-Farbtabelle;

- + Originalfarben,
- Wiedergabe ohne Maske auf unbelichtetem Film bezogen,
- Wiedergabe ohne Maske auf „Grau“ bezogen,
- △ Wiedergabe mit Maske auf „Grau“ bezogen.

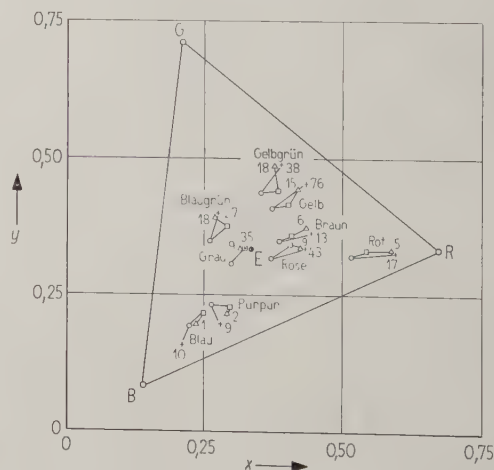


Bild 13. Normfarbtabelle; R, G, B Wiedergabe-Primärvalenzen,

- + Originalfarben,
  - Wiedergabe ohne Maske auf unbelichtetem Film bezogen,
  - Wiedergabe ohne Maske auf „Grau“ bezogen,
  - △ Wiedergabe mit Maske auf „Grau“ bezogen.
- (Die Zahlen geben die relative Helligkeit an,  $Y_E = 100$ .)

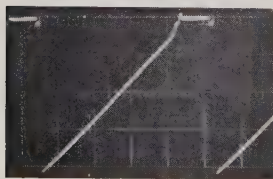


Bild 10. Eingangssigna der  $\gamma$ -Korrekturstufe.

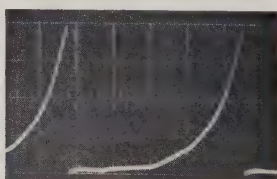


Bild 11. Ausgangssigna der  $\gamma$ -Korrekturstufe.

Testfarbe richtig wiedergegeben wird. Das entspricht beim photographischen Kopiervorgang einer Filterung des gesamten Kopierlichtes. Die so verbesserten Signale bilden die Grundlage zur Maskenberechnung.

Mit dem oben erwähnten graphischen Verfahren ergaben sich für diesen Film die folgenden Maskengleichungen:

$$\begin{aligned} R &= 1,14 R - 0,14 G, \\ G &= -0,17 R + 1,11 G + 0,06 B, \\ B &= -0,13 R - 0,17 G + 1,30 B. \end{aligned} \quad (35)$$

Die damit erreichten Farbkorrekturen sind in die Bilder 12 und 13 eingetragen. Bemerkenswert sind die großen Helligkeitsabweichungen gegenüber dem Original.

Der mittlere RUCS-Abstand beträgt  $d = 9,8 \cdot 10^{-3}$ . Die Bilder 14 bis 16 zeigen die Photographien der Originale und die Bilder 17 bis 19 die der elektronisch umgekehrten Farbnegative. Durch den nochmaligen photographischen Prozeß (Aufnahme der Schirmbilder) tritt trotz der gleichen Filmart noch eine gewisse Farbverzerrung auf.



Bild 14. Farbttestbild, photographisch umgekehrt.



Bild 17. Farbttestbild, elektronisch umgekehrt.



Bild 15. Sonnenblume, photographisch umgekehrt.



Bild 18. Sonnenblume, elektronisch umgekehrt.



Bild 16. Geranie, photographisch umgekehrt.



Bild 19. Geranie, elektronisch umgekehrt.

### 4.3. Die Umkehrungsanlage als Filmanalysator

Sollen zu einem Farbnegativ die günstigsten Kopierbedingungen ermittelt werden, so ist es üblich, unter veränderten Kopierbedingungen mehrere Probeabzüge zu machen. Die oben beschriebene Anlage gestattet es, bei geeigneter Eichung diese gesuchten Bedingungen direkt auf Grund des wiedergegebenen Bildes zu bestimmen, und zwar

1. Den Gesamtlichtstrom des Kopierlichtes aus der Blendeneinstellung des Objektivs oder der gemeinsamen Regelung der Kanalempfindlichkeiten aller drei Kanäle.
2. Die Konzentration der Kopierfilter aus den Empfindlichkeitseinstellungen der einzelnen Kanäle.
3. Die Maskenwerte aus den eingestellten Koeffizienten  $a_{ik}$ .

Voraussetzung ist dabei größte Stabilität der Übertragungsanlage einschließlich der Bildröhre.

### 5. Verbesserung der Anlage

Die oben beschriebene Umkehrungsanlage ist als reines Versuchsgerät entwickelt worden und bedarf bei Weiterentwicklung noch verschiedener Verbesserungen. Der geringe Störabstand im Rotkanal macht es notwendig, statt der Lichtpunktabtastung mit Abtaströhre und Photovervielfacher besser einen Speicherabtaster mit Gleichlichtquelle und Vidikon zu benutzen, wobei der Lichtstrom gegenüber einer Abtaströhre unvergleichlich größer sein kann.

Bei Benutzung einer Abtaströhre empfiehlt es sich, eine dynamische Fokussierung oder besser noch eine Regelung auf konstante Rasterhelligkeit vorzusehen. Da die Lichtpunkthelligkeit stark von der Fokussierung abhängt — bei schlecht fokussiertem Strahl ist die Punkthelligkeit größer — sind die Rasterränder meistens heller (bis zu 15%).

Weiterhin muß eine Übersteuerungsanzeige bzw. automatische Regelung vorgesehen werden, damit ein Kanal nicht durch ein zu großes Eingangssignal gesperrt wird und dadurch eine falsche Wiedergabefarbvalenz erzeugt.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. Dr.-Ing. F. W. GUNDLACH, Direktor des Instituts für Hochfrequenztechnik und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. J. HELWIG, Direktor des Instituts für Lichttechnik der Technischen Universität Berlin, Herrn Prof. Dr.-Ing. F. KIRSCHSTEIN, Direktor des Instituts für Hochfrequenz- und Fernmeldetechnik der Technischen Hochschule Braunschweig, Herrn Prof. Dr.-Ing. M. RICHTER, Bundesanstalt für Materialprüfung Berlin-Dahlem, sowie der Fa. AGFA AG, Leverkusen, für ihre großzügige Unterstützung.

### Schrifttum

- [1] RICHTER, M., Grundriß der Farbenlehre der Gegenwart. Verlag Steinkopff, Leipzig 1940.
- [2] BERGER, H., AGFA-Color. Verlag Girardet, Essen 1942.
- [3] BOUMA P. J., Farbe und Farbwahrnehmung. N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven 1951.
- [4] RICHTER, M., Farbmessung nach dem Spektralverfahren. Arch. tech. Messen V 433-5 (Mai 1940).
- [5] MICHAELS, E. L., Basic colorimetry for color-television. Elect. Engrg. **75** [1956], 984–989.
- [6] WENTWORTH, J. W., Color-television engineering. McGraw-Hill Book Co., New York 1955.
- [7] Second color-television issue of Proc. Inst. Radio Engrs. **42** [1954], Nr. 1.
- [8] WINTRINGHAM, W. T., Color-television and colorimetry. Proc. Inst. Radio Engrs. **39** [1951], 1135–1172.
- [9] FINK, D. G., Television engineering handbook. McGraw-Hill Book Co., New York 1957.
- [10] BINGLY, F. J., Colorimetry in color-television. Proc. Inst. Radio Engrs. **41** [1953], 838–851; **42** [1954], 48–57.
- [11] SCHWARTZ, E., Übersicht über die verschiedenen Farbfernsehsysteme. A.E.Ü. **9** [1955], 487–504.
- [12] MAYER, N., Farbfernsehen nach dem NTSC-Verfahren. Elektron. Rdsch. **11** [1957], 1–6.
- [13] RICHTER, M., Das Normalreiz-System der Farbmessung. Arch. tech. Messen V 433-4 (April 1940).
- [14] SCHULZE, W., Rechnerische Bestimmung der Farbwiedergabe in der subtraktiven Farbenphotographie unter verschiedenen Versuchsbedingungen. Z. wiss. Photograph. **44** [1949], 77–123.
- [15] HELLMIG, E., Graphische Hilfsmittel für die zahlenmäßigen Beziehungen zwischen RUCS- und IBK-Koordinaten. Z. wiss. Photograph. **43** [1948], 237–246.
- [16] HELLMIG, E., Beitrag zur mathematischen Behandlung der subtraktiven Farbwiedergabeverfahren. Z. wiss. Photograph. **43** [1948], 68–112.
- [17] SCHULZE, W. und HÖRMANN, H., Die Darstellung der mit den AGFA-Color-Positiv-Farbstoffen ermiscbaren Farben. Z. wiss. Photograph. **43** [1948], 53–59.
- [18] SCHULZE, W. und HÖRMANN, H., Die Anwendung objektiver Prüfmethoden auf den subtraktiven Farbfilm unter besonderer Berücksichtigung des AGFA-Color-Verfahrens. Z. wiss. Photograph. **43** [1948], 44–52.
- [19] NEUGEBAUER, H. E. J., Der heutige Stand der theoretischen Behandlung farbtreuer Reproduktionsverfahren. Z. wiss. Photograph. **40** [1941/42], 177–218.
- [20] NEUGEBAUER, H. E. J., Theorie der subtraktiven Reproduktionsverfahren. Z. wiss. Photograph. **41** [1942/43], 1–47.
- [21] OLIVER, B. M., Tone rendition in television. Proc. Inst. Radio Engrs. **38** [1950], 1280–1300.
- [22] BURR, R. P., The use of electronic masking in color-television. Proc. Inst. Radio Engrs. **42** [1954], 192–200.
- [23] MAYER, A. R., HELWIG, H. J. und BECKMANN, A., Lichttechnik. Hütte Band IVa, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin 1957.
- [24] McILLWAIN, K. und DEAN, CH. E., Principles of color-television. J. Wiley & Sons, New York 1956.
- [25] FINK, D. G., Color-television standards NTSC. McGraw-Hill Book Co., New York 1955.
- [26] HAINES, J. H. und TINLEY, G. R., Live flying-spot color scanner. Elect. Engrg. **75** [1956], 528–533.
- [27] MAYER, N., Punktlichtabtastung für undurchsichtige farbige Vorlagen. Rundfunktech. Mitt. **3** [1959], 123–131.
- [28] VALETON, J. J. und VAN DER POEL, F. J. H., Der Lichtpunktabtaster. Philips tech. Rdsch. **15** [1954], 173–185.
- [29] MEINKE, H. H. und GUNDLACH, F. W., Taschenbuch der Hochfrequenztechnik. Springer-Verlag, Berlin 1956.
- [30] SCHADE, O. H., Image gradation, graininess and sharpness in television and motion picture systems. J. Soc. Mot. Pict. Telev. Engrs. **56** [1951], 137–177.
- [31] BREWER, W. L., LADD, J. H. und PINNEY, J. E., Proposed controls for electronic masking in color-television. Inst. Radio Engrs. Conv. Rec. [1955], Part 7, 63–68.
- [32] PUTMAN, R. E., Flying-spot scanner for color-television. J. Soc. Mot. Pict. Telev. Engrs. **64** [1955], 324–325.
- [33] DIN 5031, Strahlungsphysik und Lichttechnik (Juni 1953).
- [34] DIN 5033, Farbmessung (April 1954).
- [35] DIN 1349, Lichtabsorption in optisch klaren Stoffen (Febr. 1955).

# Über den Entwurf von Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit einer im Tschebyscheffschen Sinne approximierten konstanten Gruppenlaufzeit

Von EGBERT ULBRICH, Backnang, und HANS PILOTY, München

(A.E.Ü. 14 [1960], 451–467; eingegangen am 18. Februar 1960)

DK 621.372.54

Die Aufgabenstellung erfordert die Synthese zweier Klassen rationaler Funktionen: Einerseits der Klasse der Laufzeitfunktionen und andererseits einer solchen, welche die Tschebyscheffsche Ebnung beinhaltet.

Hierzu werden nach Definition der notwendigsten Begriffe aus der Netzwerktheorie die Eigenschaften von Allpaß-Laufzeitfunktionen angegeben. Als zweite Funktionenklasse wird die der Tschebyscheffschen rationalen Funktionen nach BERNSTEIN herangezogen. Mit Hilfe einer konformen Abbildung gelingt es, eine vereinfachte und für die Laufzeitapproximation geeignete Darstellung letzterer in einem die Frequenz Null einschließenden Intervall zu gewinnen. Die Analyse des Approximationsproblems führt nunmehr zur Aufstellung der Lösungsgleichung in geschlossener Form. Ein gut konvergierendes iteratives Verfahren zu deren beliebig genauer und strenger Auflösung wird entwickelt. Schließlich wird die Lösung auf das allgemeine endliche Approximationsintervall sowie auf Tiefpässe und Bandpässe erweitert.

Ein Überblick über zahlreiche praktisch ausgeführte Approximationen bestätigt den theoretischen Ansatz und führt zu allgemeineren Gesichtspunkten. Für ein spezielles Beispiel höheren Grades wird der Entwurf bis zur Bestimmung der Schaltelemente im einzelnen ausgeführt.

Der Anhang enthält einen Katalog mit Lösungen für die Grundgrade 1 bis 10 (Gesamtgrad: 2 bis 20) zum unmittelbaren Gebrauch für den Benutzer.

The statement of the problem calls for the synthesis of two classes of rational functions: on the one hand of that of delay functions and on the other of a class that includes Tschebyscheff's maximally-flat forming of the curve.

After defining the principal concepts of network theory, the paper proceeds to stating the properties of all-pass delay functions for this purpose. For the second class of functions, recourse is made to Tschebyscheff's rational functions according to BERNSTEIN. With the aid of conformal mapping one succeeds in gaining in an interval including the zero frequency a simplified presentation of the latter, suitable for the delay approximation. The analysis of the approximation problem now leads to the statement of the solution equation in closed form. A well converging iterative method is developed for solving it with any desired degree of accuracy and exactness. Finally the solution is extended to the general finite approximation interval as well as to low-pass and band-pass filters.

A survey of numerous practically effected approximations confirms the theoretical statement and leads to more general aspects. For a special example of higher order the design procedure is carried through up to a detailed determination of the circuit elements.

The appendix includes a catalog with solutions for the basic degrees 1 to 10 (total degree: 2 to 20) for direct application by the user.

## Vorwort

Dieser Arbeit liegt die Dissertation\* eines der beiden Autoren (ULBRICH) zugrunde. Vom anderen (PILOTY) stammt im wesentlichen die allgemeine mathematische Beweisführung in der hier vorgelegten Form. Dieser hat das offen gebliebene Problem eines strengen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweises der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt<sup>1</sup>.

Die numerischen Rechnungen wurden auf der Programmgesteuerten Elektronischen Rechenanlage München (PERM) der Technischen Hochschule München ausgeführt. Wir danken Herrn W. ANAKKER für seine ständige Hilfsbereitschaft.

\* Technische Hochschule München, 1960.

<sup>1</sup> Sitzungsberichte der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Juni-Sitzung 1960, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München.

## Einleitung

*Aufgabenstellung, Stand des Wissens, Abgrenzung des Themas und Gliederung der Arbeit*

Bei Übertragungssystemen und Endgeräten der Nachrichtentechnik sowie in der elektrischen Meßtechnik tritt gelegentlich die Forderung auf, Nachrichten oder ein einzelnes Signal um eine bestimmte Zeit zu verzögern. Unter einem anderen Gesichtspunkt betrachtet kann die Forderung lauten, es solle ein Signal kurzzeitig gespeichert werden. Während die technische Realisierung durch homogene Leitungen, etwa durch Laufzeitkabel, bekannt und in vielen Fällen auch angebracht ist, so erscheint es andererseits oft wünschenswert oder sogar notwendig, Netzwerke aus konzentrierten Schaltelementen vorzusehen. Voraussetzung hierzu ist jedoch die Aufstellung einer zulässigen Übertragungsfunktion, welche das geforderte Laufzeitverhalten möglichst gut approximiert. Ein hierfür geeignetes schlüssiges Verfahren ist bisher nicht bekannt.

Abgesehen von graphisch-empirischen Approximations-Verfahren, wie sie etwa von BÜNEMANN [3], KUH [6] und MARTIN [7] angegeben wurden, existieren zwar einige Verfahren, die den in sich geschlossenen Entwurf eines Allpasses ermöglichen. So entwickelte THOMSON in [12] einen Typ von Laufzeitfunktionen, die im wesentlichen aus einer Verknüpfung von Lommelschen Polynomen bestehen und einen maximal geebneten Laufzeitverlauf gewährleisten. Demgegenüber erzielte DARLINGTON in [4] durch eine Frequenztransformation Allpässe mit Laufzeitschwankungen, deren Ausmaß wiederum durch den Entwurf nur näherungsweise erfaßt werden kann. Untersuchungen eines der Verfasser (ULBRICH), diese Schwankungen mit Hilfe einer zweistufigen konformen Abbildung zu vergleichmäßigen führten zu guten Ergebnissen, aber noch nicht zu einer eindeutigen Lösung des Problems.

In der vornehmlich der Approximation der Dämpfung gewidmeten Arbeit [5] berührt HELMAN zuletzt auch das Problem der Laufzeitapproximation durch Tschebyscheffsche rationale Funktionen. Dort wurde erstmals eine — wenn auch nicht vollständige — Lösung für den Grundgrad<sup>2</sup>  $n = 2$  angegeben; doch vermerkt HELMAN dann, daß zur Lösung für höhere Grade weitere Untersuchungen wünschenswert seien.

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, hierzu einen Beitrag zu liefern, indem ein allgemeines und schlüssiges, für Digitalrechner besonders geeignetes Verfahren zur Approximation einer konstanten Gruppenlaufzeit im Tschebyscheffschen Sinne angegeben wird. Das Approximationsintervall kann sich hierbei von tiefen Frequenzen beginnend bis zu einer oberen Grenzfrequenz erstrecken (tiefpaßartiges Laufzeitverhalten) oder aber auf ein bestimmtes Frequenzband beschränken (bandpaßartiges Laufzeitverhalten).

Für die realisierenden Schaltungen selbst sind Reaktanzvierpole, d. h. Vierpole aus linearen, passiven, verlustlosen, konzentrierten und reziproken Elementen endlicher Anzahl vorgesehen. Hinsichtlich des Dämpfungsverhaltens können diese als Allpässe mit der für alle Frequenzen konstanten Dämpfung Null oder als Tiefpässe und Bandpässe im Sinne von Minimum-Phasen-Netzwerken entworfen werden.

In einem ersten Kapitel der Arbeit werden die notwendigsten theoretischen Grundlagen für die Synthese von Allpässen zusammengestellt und die Eigenschaften der Laufzeitfunktion untersucht.

Ein zweites Kapitel befaßt sich mit den zur Lösung der gestellten Aufgabe herangezogenen Tschebyscheffschen rationalen Funktionen.

In einem dritten Kapitel, dem eigentlichen Hauptteil der Arbeit, wird die Lösung des Tschebyscheffschen Approximationsproblems für konstante Gruppenlaufzeit abgeleitet und in eine auf die unmittelbare Anwendbarkeit zugeschnittene Form gebracht.

Ein viertes Kapitel gibt einen Überblick über die praktisch ausgeführten und katalogisierten Ap-

proximationen sowie die sich hieraus ergebenden allgemeineren Gesichtspunkte.

Für ein spezielles Beispiel höheren Grades wird der Entwurf im einzelnen praktisch ausgeführt und die realisierende Schaltung angegeben.

Im Schlußteil der Arbeit wird nach einer allgemeinen Zusammenfassung auf die Möglichkeit der expliziten Lösung des Problems kurz eingegangen.

## 1. Allgemeine Grundlagen, Eigenschaften der Laufzeitfunktion

### 1.1. Überblick

Der Aufgabenstellung entsprechend ist der Schwerpunkt dieser Arbeit in dem Laufzeitverhalten von Reaktanzvierpolen zu sehen. Aus diesem Grund wird auch in dem ersten Kapitel nach Darstellung der notwendigen allgemeinsten Zusammenhänge sofort auf die Besonderheiten der Laufzeitfunktion und hier wieder auf diejenige von Allpässen überzugehen sein, da dieser Netzwerktyp gerade und ausschließlich auf das Phasen- bzw. Laufzeitverhalten abgestimmt ist. Auf die Realisierung einer konstanten Gruppenlaufzeit durch einen dämpfenden Reaktanzvierpol (Tiefpaß oder Bandpaß) als sehr einfachen Sonderfall wird an späterer Stelle nur kurz einzugehen sein.

### 1.2. Die Betriebsübertragungsfunktion und abgeleitete Größen

Normiert man in üblicher Weise das Widerstandsniveau eines Vierpols auf den als ohmisch vorausgesetzten Innenwiderstand  $R_1$  der Spannungsquelle und den ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich groß angenommenen Abschlußwiderstand  $R_2$ , so erhält man die Betriebsanordnung des Vierpols nach Bild 1.

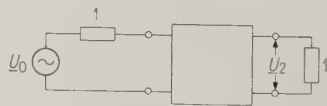


Bild 1. Betriebsanordnung eines Vierpols.

Als Frequenzvariable werde die auf eine geeignete Bezugsfrequenz  $f_B$  normierte Größe

$$\lambda = \varrho + j\omega \quad (1)$$

benutzt, so daß die technisch wesentlichen Frequenzen auf die positive imaginäre Achse der  $\lambda$ -Ebene zu liegen kommen. Aus dem Verhältnis der von der Quelle maximal abgebbaren Leistung  $(U_0/2)^2/R_1$  zu der vom Abschlußwiderstand aufgenommenen Leistung  $U_2^2/R_2$  ergibt sich im Fall des Bildes 1 die Betriebsübertragungsfunktion  $H$  zu:

$$H = \frac{U_0/2}{U_2} \quad (2)$$

Das zur Kennzeichnung der Übertragungseigenschaften des Vierpols benutzte Betriebsübertragungsmaß  $g$  ist definiert durch

$$g = \ln H = \ln |H| + j \arg H = a + jb, \quad (3)$$

<sup>2</sup> Zur Definition des Grundgrades  $n$  siehe Abschnitt 1.3.

# Die elektronische Umkehrung von photographischen Farbnegativen

Von KLAUS WELLAND

Mitteilung aus dem Institut für Hochfrequenztechnik  
der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg

(A.E.Ü. 14 [1960], 441—450; eingegangen am 30. Juni 1960)

DK 778.8:621.397.331.2

Zur Untersuchung, welche Möglichkeiten zur elektronischen Umkehrung von Farbnegativen bestehen, wurden ein Lichtpunktabtaster mit drei Aufnahmekanälen und eine Wiedergabeeinrichtung entwickelt. Die spektralen Empfindlichkeiten der drei Kanäle sind schmalbandig und den Absorptionskurven der Negativfarbstoffe angepaßt.

Die durch den Film und die Anlage verursachten Helligkeits- und Farbverzerrungen werden in  $\gamma$ -Korrektur- und Maskenstufen reduziert. Die Koeffizienten der Maskenmatrix ergeben sich aus bekannten Testfarben einerseits und deren photographischen Negativaufnahmen andererseits.

Die Brauchbarkeit der Anlage wird durch einen Vergleich von Originalfarben und deren Reproduktion bestimmt. Bei neun über das Spektrum verteilten Testfarben ist der mittlere RUCS-Abstand  $d = 9,8 \cdot 10^{-3}$  mit größter Abweichung im Blaubereich.

Bei geeigneter Eichung der Korrekturglieder kann die Anlage als einfacher Filmanalysator verwendet werden.

To investigate the possibilities of an electronic reversal of color negatives, a flying spot scanner with three input channels and a reproducing device were developed. The spectral sensitivities of the three channels are selective and adapted to the absorption curves of the negative pigments.

The distortion of brightness and color as introduced by the film and the system is reduced by gamma-correcting and masking stages. The coefficients of the masking matrix are found from well-known test colors on the one hand and their photographic negative renditions on the other.

The usefulness of the system is determined by a comparison of original colors and their rendition. With nine test colors distributed over the spectrum the mean RUCS spacing is  $d = 9.8 \times 10^{-3}$ , with the maximum deviation found in the blue region.

Upon suitable calibration of the correcting elements, the system can be used as a simple film analyzer.

## 1. Einleitung

Fast alle Fernsehstudios und auch einige Filmkopieranstalten sind heute mit Anlagen ausgerüstet, die es gestatten, photographische Schwarz-Weiß-Negative auf dem Bildschirm einer Braunschen Röhre als Positiv wiederzugeben. Das Verfahren bietet den Studios den Vorteil, Filmaufzeichnungen direkt von dem gegenüber Umkehrfilm oder Positivkopien billigeren Negativmaterial wiederzugeben und den Kopieranstalten die Möglichkeit, unbrauchbare Aufnahmen vor dem Kopieren auszusondern bzw. Kopiervorschriften zu bestimmen.

Das Umkehrungsverfahren ist dabei aus dem normalen Übertragungsverfahren für Positivfilme oder Diapositive abgeleitet, indem die Phase der bei der punktwisen Abtastung der Filmdichte entstehenden elektrischen Signale um  $180^\circ$  gedreht wird. Die auftretenden Gradationsfehler werden durch geeignete Schaltungsmaßnahmen beseitigt.

Wird das normale Verfahren zur Wiedergabe von Farbfilmen verwendet, so müssen die optischen Dichten der einzelnen Filmschichten — es sind in der Regel drei — getrennt abgetastet werden. Der apparative Aufwand steigt entsprechend, da drei Aufnahme- und Wiedergabekanäle benötigt werden. Die auch hierbei auftretenden Gradationsfehler haben gegenüber den möglichen Farbabweichungen eine geringere Bedeutung. Es ist daher unbedingt erforderlich, auch noch Korrekturmöglichkeiten für die einzelnen Farben vorzusehen.

Prinzipiell können auch, entsprechend dem weiter oben geschilderten Verfahren, photographische

Farbnegative umgekehrt werden. Allerdings wird der Hauptanwendungsbereich weniger bei den Fernsehstudios als vielmehr bei den Kopieranstalten liegen, die damit die Möglichkeit haben, die sehr komplizierten Kopiervorschriften für Farbfilme leichter zu bestimmen.

## 2. Farbproduktion

Farben, oder besser Farbvalenzen, können auf verschiedene Weise reproduziert werden, wobei die „Güte“ des Verfahrens durch die Abweichungen der reproduzierten von den vorgegebenen Farbarten gekennzeichnet ist.

Es soll an dieser Stelle nur kurz auf den Begriff Farbvalenz, die in dieser Arbeit verwendeten Farbproduktionsverfahren und deren mathematische Behandlung eingegangen werden, da dieses schon an anderer Stelle geschehen ist ([1]—[11], [13], [34]).

### 2.1. Additive Farbmischung

Gelangen zwei verschiedene, sichtbare Strahlungen gleichzeitig auf dieselbe Stelle der Netzhaut, so sieht das Auge nicht die diesen Strahlungen entsprechenden Farbvalenzen, sondern die additive Mischung beider.

Jede Farbvalenz kann durch additive Mischung von maximal drei anderen Farbvalenzen, den sog. Primärvalenzen, nachgebildet werden [4], [12], [13], [30], [34]. Die Gesamtheit der Farbvalenzen nimmt demnach einen Raum ein. Jeder Farbvalenz kann ein Vektor zugeordnet werden, der vom Ursprung des Systems, dem Schwarzpunkt, ausgeht.

Die Wahl der Primärvalenzen ist beliebig, sie müssen nur voneinander unabhängig sein, d. h. die dritte Primärvalenz darf nicht aus den beiden anderen ermischbar sein. Der Übergang von einem Primärvalenztripel zu einem anderen bedeutet nur eine lineare Transformation der Raumkoordinaten. Allgemein bedient man sich der nicht realisierbaren Normvalenzen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  [13], [34]. Gelegentlich, z. B. bei Berechnung von Bildröhreneingangssignalen, muß man allerdings zu anderen Primärvalenzen übergehen. Die Transformationsgleichungen ergeben sich dabei aus bestimmten Randbedingungen.

Genügt die Kenntnis der Farbart der Farbvalenz — eine Farbvalenz ist durch Farbart und Leuchtdichte bzw. Hellbezugswert gegeben —, so interessiert nur die Richtung und nicht die Länge des Farbvektors. Sein Durchtrittspunkt durch eine im Farbenraum gegebene Ebene bestimmt somit die Farbart, zu deren Definition also nur noch zwei Größen erforderlich sind. Man kommt so zur zweidimensionalen Farbtabelle.

Die Normfarbwertanteile, das sind die Koordinaten in der Farbtabelle, einer Farbvalenz mit der spektralen Energieverteilung  $E_\lambda$  berechnen sich aus deren Normfarbwerten

$$\begin{aligned} X &\sim \int E_\lambda \bar{x}_\lambda d\lambda, \\ Y &\sim \int E_\lambda \bar{y}_\lambda d\lambda, \\ Z &\sim \int E_\lambda \bar{z}_\lambda d\lambda, \end{aligned} \quad (1)$$

worin  $\bar{x}_\lambda$ ,  $\bar{y}_\lambda$  und  $\bar{z}_\lambda$  die Normspektralwerte [13], [34] sind, zu

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{X + Y + Z}, \\ y &= \frac{Y}{X + Y + Z}, \\ z &= \frac{Z}{X + Y + Z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Die mit einem Primärvalenztripel ermischbaren Farbvalenzen liegen demnach innerhalb des von diesem Tripel in der Farbtabelle gebildeten Dreiecks.

Bestimmt man nach Gl. (2) die Normfarbwertanteile für alle Spektralfarben, so ergibt sich in der Farbtabelle der sogenannte Spektralfarbenzug, der, ergänzt durch die Purpurlinie, alle in der Natur vorkommenden Farbarten umschließt (Bild 7).

Eine additive Mischung zweier Farbvalenzen entspricht der Addition ihrer Normfarbwerte, d. h. die Farbart der Mischung hängt nur von den Farbvalenzen der zu mischenden Farben ab, nicht aber von deren spektralen Energieverteilungen: Ein und dieselbe Farbvalenz kann nämlich von unendlich vielen Energieverteilungen erzeugt werden.

Die Normvalenzen sind so gewählt, daß  $Y$  gleichzeitig den Hellbezugswert der Farbvalenz darstellt. Das bedeutet, daß die Normspektralwerte  $\bar{y}_\lambda$ , über  $\lambda$  aufgetragen, die Hellempfindlichkeitsfunktion des Normalbeobachters bei helladaptiertem Auge ergeben.

## 2.2. Subtraktive Farbmischung

Bei subtraktiver Mischung wird von einer gegebenen Strahlung, z. B. weißem Licht, soviel absorbiert, daß sich eine spektrale Energieverteilung ergibt, die der zu ermischenden Farbvalenz entspricht. Im einfachsten Fall wird diese spektrale Absorption durch Filter variabler Dichte bei festen Absorptionsbereichen verwirklicht [14], [16]—[20].

Die mathematische Behandlung der subtraktiven Farbmischung ist viel umständlicher als die der additiven. Während bei letzterer nur die Normfarbwerte der Primärvalenzen maßgebend sind, muß hier die spektrale Energieverteilung (in diesem Fall die Strahlungsfunktion und der spektrale Verlauf der Filtertransmissionsgrade, welche meistens nicht geschlossen mathematisch zu erfassen sind) berücksichtigt werden.

Durchläuft z. B. Licht mit der spektralen Energieverteilung  $E_\lambda$  drei Filter mit den Transmissionsgraden  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  und  $\tau_3$ , so ergeben sich die Normfarbwerte — und daraus die Normfarbwertanteile — der subtraktiv ermischten Farbvalenz zu

$$X \sim \int E_\lambda \tau_1 \tau_2 \tau_3 \bar{x}_\lambda d\lambda \quad (3)$$

und entsprechend für  $Y$  und  $Z$ . Mit der optischen Dichte der Filter

$$D_i = -\lg \tau_i \quad (4)$$

wird

$$X \sim \int E_\lambda 10^{-(D_1 + D_2 + D_3)} \bar{x}_\lambda d\lambda. \quad (5)$$

Für ideale Filter, bei denen die Dichte in einem bestimmten Spektralbereich konstant ist und außerhalb dieses Bereiches den Wert Null hat, läßt sich die Formel (5) sehr einfach auswerten. Praktisch lassen sich derartige Filter kaum verwirklichen.

## 2.3. Farbverzerrungen

Soll die Güte einer Farbproduktion beurteilt werden, so müssen Originalfarbvalenz und reproduzierte Farbvalenz miteinander verglichen werden. Man wird die Koordinaten beider in die Farbtabelle eintragen und aus dem Abstand der Punkte auf die Verzerrungen schließen. Die  $Y$ -Werte geben Aufschluß über die Helligkeitsabweichungen.

Nun geben die Abstände in der Normfarbtabelle keinen Anhalt für die Größe der Abweichung, da bei gleichen Abständen die empfindungsmäßigen Abweichungen je nach Farbart verschieden sind.

Auf Grund von vielen Messungen hat man eine Farbtabelle ermittelt, in welcher gleiche Abstände unabhängig von der Farbart gleich empfundenen Farbabweichungen entsprechen [1], [14], [15]. Die Farbwertanteile dieses sogenannten RUCS-Systems (Rectangular Uniform Chromaticity Scale) ergeben sich durch lineare Transformation aus den Normfarbwertanteilen:

$$\begin{aligned} u &= 0,075 - \frac{0,8230x + 0,8230y - 0,8230}{1,0000x - 7,0534y - 1,6402}, \\ v &= 0,500 + \frac{3,6970x - 5,0771y - 1,3669}{1,0000x - 7,0534y - 1,6402}, \\ w &= 1 - (u + v). \end{aligned} \quad (6)$$

Es ist also möglich, für ein bestimmtes Reproduktionsverfahren für viele Testfarben die Abstände in der RUCS-Tafel zu bestimmen und zu mitteln.

#### 2.4. Photographische Farbenreproduktion

Wird eine photographische Schicht nach der Belichtung in üblicher Weise entwickelt und fixiert, so ist innerhalb eines gewissen Belichtungsspielraumes die Dichte des entstandenen Negativs in Abhängigkeit von der Belichtung  $H$

$$D = K_1 + \gamma \lg H, \quad (7)$$

worin  $K_1$  eine Konstante und  $\gamma$  das für die Gradation des Filmes maßgebende „Gamma“ ist.  $\gamma$  hat im allgemeinen den Wert von 0,7 bis 0,8 (abhängig von der Entwicklungszeit) (Bild 1).

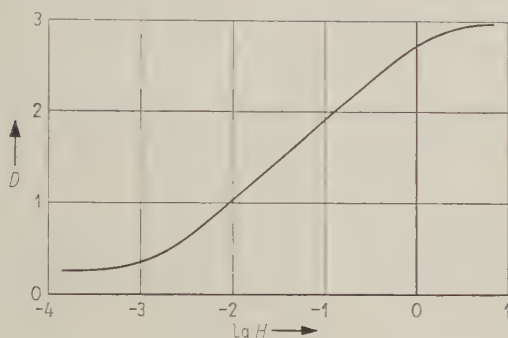


Bild 1. Gradationsfunktion eines Negativfilmes.

Bei Farbaufnahmen macht man durch Farbfilter, die Aufnahmefilter, sogenannte Farbauszüge, entwickelt zu Positiven und kann nun entweder durch entsprechende Wiedergabefilter die Farbauszüge übereinanderprojizieren (additive Farbphotographie), oder die Positive ihrer Dichte entsprechend einfärben und, wie im Abschnitt 2.3 besprochen, übereinandergelegt die zu reproduzierenden Farbvalenzen subtraktiv ermischen. Dabei ist zu beachten, daß die Aufnahmefilter in jedem Fall der Luther-Bedingung genügen müssen [1], d. h. die Produkte ihrer spektralen Transmissionsgrade mit den entsprechenden spektralen Empfängerempfindlichkeiten in linearem Zusammenhang mit den Normspektralwertkurven stehen.

Praktisch liegen drei, in bestimmten Spektralbereichen sensibilisierte Filmschichten übereinander, in denen bei der Entwicklung mit Hilfe von Farbkupplern den Silberdichten proportionale Konzentrationen von Farbstoffen gebildet werden (AGFA-Color-Verfahren).

Ist die wirksame Belichtung für eine Filmschicht bei energiegleichem Aufnahmeleucht

$$H_i = H_0 \int \varrho_{\lambda} s_{i\lambda} d\lambda \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

mit

$\varrho_{\lambda}$  Reflexionsgrad des Objektes,

$s_{i\lambda}$  spektrale Empfindlichkeit der Filmschicht  $i$

und die entstehende Negativdichte

$$D_i = K_i + \gamma \lg H_i = \gamma \lg K'_i H_i, \quad (9)$$

so wird die Farbstoffkonzentration

$$c_i = K''_i D_i = K''_i \gamma \lg K'_i H_i. \quad (10)$$

Sind die Farbstoffe optisch klar, kann für sie das Lambertsche Gesetz angewendet werden, d. h. ihr spektraler Reintransmissionsgrad fällt bei konstanter Filterdicke exponentiell mit der Farbstoffkonzentration. Auf einen Reintransmissionsgrad  $\vartheta'_\lambda$  mit der ihm entsprechenden Konzentration  $c'$  bezogen, ergibt sich

$$\vartheta_\lambda = \vartheta'_\lambda c/c' \quad \text{bzw.} \quad D = c/c' D', \quad (11)$$

wenn man die Reflexion an der Filteroberfläche vernachlässigt ( $\vartheta_\lambda \approx \tau_\lambda$ ,  $P \approx 1$ ).

Werden die Konzentrationsverhältnisse  $c_i = c/c'$  der Farbstoffe so abgeglichen, daß sich bei subtraktiver Mischung ein (Unecht-) Grau der Dichte  $D = 1$  ergibt und wird dabei willkürlich  $c_i = 1$  gesetzt, so werden auch die  $K''_i = 1$ . Gl. (10) vereinfacht sich dann zu

$$c_i = \gamma \lg K'_i H_i. \quad (12)$$

Die Normfarbwerte der subtraktiven Farbmischung sind

$$\begin{aligned} X &\sim E_0 \int \tau_{01}^{c_1} \tau_{02}^{c_2} \tau_{03}^{c_3} \bar{x}_\lambda d\lambda, \\ Y &\sim E_0 \int \tau_{01}^{c_1} \tau_{02}^{c_2} \tau_{03}^{c_3} \bar{y}_\lambda d\lambda, \\ Z &\sim E_0 \int \tau_{01}^{c_1} \tau_{02}^{c_2} \tau_{03}^{c_3} \bar{z}_\lambda d\lambda, \end{aligned} \quad (13)$$

wenn die  $\tau_{0i}$  die Transmissionsgrade der auf ein (Unecht-) Grau der Dichte  $D = 1$  abgeglichenen Farbstoffe, die „Primärvalenzen“ der subtraktiven Mischung sind.

Es ist mathematisch nicht möglich, aus dem System (13) bei bekannten  $\tau_{0i}$  zu gegebenen Normfarbwerten die Konzentration zu bestimmen.

Die bei der photographischen Farbproduktion auftretenden Farbverzerrungen kann man in zwei große Gruppen teilen, in lineare und nichtlineare Verzerrungen. Die linearen Verzerrungen sind leicht zu beheben und sollen hier nicht weiter berücksichtigt werden. Sie treten z. B. auf, wenn Aufnahme- und Wiedergabelicht nicht übereinstimmen. Durch geeignete Vorsatzfilter können diese Fehler beseitigt werden. Die nichtlinearen Verzerrungen können verschiedene Ursachen haben, die meistens im einzelnen nicht zu trennen sind: Die Luther-Bedingung ist auf der Aufnahmeseite nicht erfüllt, die Wiedergabefarbstoffe ändern ihre Farbart mit der Konzentration, der Zusammenhang zwischen Silberdichte und Farbstoffkonzentration ist nichtlinear und die Gamma der einzelnen Filmschichten sind nicht gleich. Bei einfachen, nicht verzweigten Verfahren — von einem Negativ wird ohne Zwischenkopie ein Positiv hergestellt — können nur lineare Verzerrungen behoben werden. Alle anderen Farbfehler werden durch das sogenannte Maskenverfahren weitgehend kompensiert.

Diese Masken sind Positive mit meistens sehr kleinem Gamma. Dabei unterscheidet man Silber- oder Graumasken und farbige Masken. Mit Hilfe der Graumasken kann die Farbsättigung vergrößert werden: Das Originalnegativ wird bis zu  $\gamma \approx 1$  entwickelt (die Farbsättigung steigt mit dem Gamma)

und die positive Graumaske mit  $\gamma = 0,3$ . Beim Kopieren werden Negativ und Maske konturengleich aufeinander gelegt und die steile Gradation wird durch die Maske reduziert, während die große Farbsättigung erhalten bleibt (Bild 2).

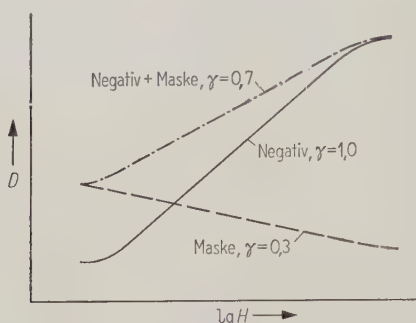


Bild 2. Vergrößerung der Farbsättigung durch eine Graumaske.

Mit farbigen Masken können Farbverzerrungen verschiedenster Art auf ein Minimum gebracht werden [2], [14]. Die dabei wichtigste Forderung ist die nach originalgetreuer Wiedergabe von unbunten Objekten.

### 3. Die elektronische Umkehrung von photographischen Negativen

In Analogie zum chemischen Kopierprozeß können photographische Negative auch elektronisch umgekehrt werden. Die Dichte des zu kopierenden Negativs wird Punkt für Punkt abgetastet und in elektrische Signale umgeformt, welche wiederum über verschiedene Verstärker und Korrekturglieder eine Bildröhre steuern.

#### 3.1. Übertragungseigenschaften der Apparatur

Ganz allgemein muß von dieser Apparatur gefordert werden, daß sie die Originale naturgetreu reproduziert. Zunächst soll diese Forderung in bezug auf die Wiedergabe des Helligkeitsumfanges, des Kontrastes, untersucht werden.

Ist die Leuchtdichte eines Szenenpunktes  $B$ , so wird die Dichte des von diesem Punkt aufgenommenen Negativs mit Gl. (9), unter Voraussetzung eines konstanten Gamma,

$$D_N = \lg K_2 B^{\gamma_N} \quad (14)$$

und der Transmissionsgrad

$$\tau_N = K_3 B^{-\gamma_N} \quad (15)$$

Fällt das bei der Abtastung durch das Negativ modulierte Licht auf eine Photozelle, so ist das von ihr abgegebene Signal dem Negativtransmissionsgrad proportional:

$$U_N = K_4 \tau_N \quad (16)$$

Es werden noch folgende Größen und Abkürzungen eingeführt:

$B_{\max}$  maximale Leuchtdichte der Szene,

$B_{\min}$  minimale Leuchtdichte der Szene,

$R = B_{\max}/B_{\min}$  Kontrast der Szene,

$L = B/B_{\max}$  normierte Leuchtdichte der Szene,

$\gamma_N$  Gamma des Negativmaterials

$b$  Leuchtdichte eines Wiedergabepunktes,

$b_{\max}$  maximale Leuchtdichte eines Wiedergabepunktes,

$b_{\min}$  minimale Leuchtdichte eines Wiedergabepunktes,

$r = b_{\max}/b_{\min}$  Wiedergabekontrast,

$l = b/b_{\max}$  normierte Wiedergabeleuchtdichte,

$\gamma_W = 2,22$  Bildröhren-Gamma.

Berücksichtigt man weiterhin eine nichtlineare Verstärkerstufe, deren Kennlinienexponent  $-\eta$  ist (Gammakorrekturstufe), und den Zusammenhang zwischen Steuerspannung und Schirmleuchtdichte der Wiedergaberöhre

$$b = K_{10}(U_0 - U)^{\gamma_W}, \quad (17)$$

so wird die normierte Wiedergabeleuchtdichte [21]

$$l = \left[ 1 + \frac{1 - r^{-1/\gamma_W}}{R^{-\gamma_N\eta} - 1} (1 - L^{\gamma_N\eta}) \right]^{\gamma_W} \quad (18)$$

Eine bessere Beurteilung der Übertragungsgüte ist möglich, wenn man den sogenannten „Gradienten“ der gesamten Übertragung einführt. Er ist definiert durch

$$g = \frac{db/b}{dL/L} = \frac{dl/l}{dL/L} \quad (19)$$

Mit Gl. (18) wird

$$g = \gamma_W \gamma_N \eta \left( 1 - \frac{R^{-\gamma_N\eta} - r^{-1/\gamma_W}}{r^{-1/\gamma_W} - 1} L^{-\gamma_N\eta} \right)^{-1} \quad (20)$$

Es war gefordert, daß die Helligkeitsübertragung naturgetreu sein soll, also muß der Gradient  $g$  von  $L$  unabhängig sein. Das ist der Fall, wenn

$$R^{-\gamma_N\eta} = r^{-1/\gamma_W}, \quad (21)$$

ist, was auch aus der Integration der Gl. (19) mit  $g = \text{const}$  folgt.

Anzustreben ist  $g = 1$ , das bedeutet gleichen Kontrast auf beiden Seiten. Da nun aber der Szenekontrast meistens größer ist als der Helligkeitsumfang eines Filmes und der Wiedergabekontrast einer Bildröhre noch kleiner ist als der eines Filmes, kann man diesen Übertragungsfehler durch Kompression des Kontrastes —  $g$  muß entsprechend gewählt werden — vermindern:

$$g = \gamma_N \gamma_W \eta \quad (22)$$

Zur positiven Wiedergabe von photographischen Farbnegativen genügt es prinzipiell, die Konzentration der drei Farbstoffe an jedem Punkt des Bildes zu kennen. Wären die Negativfarbstoffe ideal, so genügte eine Konzentrations- oder Dichtemessung innerhalb des betreffenden Spektralbereiches. Weiterhin würden auch keine Fehler dadurch auftreten, daß die drei Farbstoffschichten bei der Messung hintereinander liegen (subtraktive Mischung). In der Praxis liegen die Dinge anders, die Farbstoffe

worin

- a* die in Neper gemessene Betriebsdämpfung<sup>3</sup> und  
*b* das im Bogenmaß gemessene Betriebsphasen-  
maß<sup>3</sup>

bedeuten. Die (normierte) Gruppenlaufzeit<sup>3</sup> ist da-  
mit gegeben durch

$$\tau = db/d\omega \quad (4)$$

mit der aus der Bezugsfrequenz  $f_B$  zu berechnenden  
Bezugslaufzeit

$$T_B = \frac{1}{2\pi f_B} \quad (5)$$

als Einheit.

Hinsichtlich der Frequenzabhängigkeit läßt sich  
die Übertragungsfunktion durch den Quotienten  
zweier reeller Polynome in  $\lambda$  darstellen:

$$H(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{P(\lambda)}. \quad (6)$$

Hierfür gelten die bekannten Realisierbarkeits-  
Bedingungen, von denen nur herausgestellt werden  
soll, daß  $E(\lambda)$  ein Hurwitzpolynom ist.

### 1.3. Die Übertragungsfunktion eines Allpasses

Die allgemeine Form der Gl. (6) erhält für den  
Fall des Allpasses in der in [9] benutzten Schreib-  
weise die Form

$$H(\lambda) = \frac{E_1^*(\lambda)}{E_1(\lambda) E_1(-\lambda)}. \quad (7)$$

$E_1(\lambda)$  ist wiederum ein Hurwitzpolynom in  $\lambda$  und  
ausreichend zur eindeutigen Beschreibung der ge-  
samten Übertragungsfunktion, welche sich auch in  
der gekürzten Form

$$H(\lambda) = \frac{E_1(\lambda)}{E_1(-\lambda)} \quad (8)$$

anschreiben läßt. Der Grad von  $E_1(\lambda)$  und damit  
von  $H(\lambda)$  nach Gl. (8) soll als Grundgrad definiert  
werden:

$$\text{Grundgrad } n = \text{Grad } \{E_1(\lambda)\}. \quad (9)$$

### 1.4. Die Laufzeitfunktion eines Allpasses

Führt man in Gl. (4) an Stelle  $\tau(\omega)$  formal die  
komplexe Laufzeitfunktion  $t(\lambda)$  ein, so ist diese bei  
Allpässen gleich der logarithmischen Ableitung der  
Übertragungsfunktion [9]:

$$t(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \ln H(\lambda) = \frac{H'(\lambda)}{H(\lambda)}, \quad (10)$$

worin der Strich die Differentiation nach  $\lambda$  bedeutet.

Stellt man daher in Gl. (8) das Polynom  $E_1(\lambda)$   
durch seine — entweder negativ reellen oder in  
konjugiert-komplexen Paaren in der linken Halb-  
ebene auftretenden — Nullstellen  $\lambda_\nu$  dar, also

$$H(\lambda) = \prod_{\nu=1}^n \frac{\lambda - \lambda_\nu}{-\lambda - \lambda_\nu}, \quad \text{Re}(\lambda_\nu) < 0, \quad (11)$$

so kommt man zu der folgenden Form der Laufzeit-  
funktion:

$$t(\lambda) = \sum_{\nu=1}^n \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_\nu} + \frac{-1}{\lambda + \lambda_\nu} \right), \quad \text{Re}(\lambda_\nu) < 0. \quad (12)$$

Die aus Gl. (12) ableitbaren und wiederholt be-  
wiesenen Eigenschaften der Laufzeitfunktion seien,  
soweit sie für die weiteren Entwicklungen bedeut-  
sam sind, in den folgenden zwei Sätzen zusammen-  
gefaßt.

**Satz 1:** Als notwendige Bedingungen dafür, daß  
eine reelle rationale gerade Funktion  $t(\lambda)$   
vom Grade  $2n$  Laufzeitfunktion ist, gelten,  
daß die Funktion auf der positiven imagi-  
nären Achse nach Durchlaufen der höchstens  
 $n$  Maxima für  $\lambda \rightarrow \infty$  monoton fällt, im  
Punkt unendlich eine doppelte Nullstelle  
besitzt und im übrigen auf der imaginären  
Achse positiv und beschränkt bleibt.

**Satz 2:** Als notwendige und hinreichende Bedingung  
dafür, daß eine reelle rationale gerade Funk-  
tion  $t(\lambda)$  Laufzeitfunktion ist, gilt, daß sie  
einfache Pole hat und die Residuen der Pole  
in der linken (rechten) Halbebene den Wert  
 $+1$  ( $-1$ ) oder ganzzahliger Vielfacher hier-  
von besitzen.

Auf dieser aus Gl. (12) hervorgehenden und durch  
den Satz 2 ausgesprochenen Forderung nach einer  
ganz speziellen und sehr scharf definierten Funk-  
tion beruht die wesentliche Schwierigkeit bei der  
Approximation einer Laufzeitfunktion.

### 1.5. Realisierung und Laufzeitverlauf von Elementar- Allpässen

Hinsichtlich der Realisierung von Allpässen kann  
auf die grundsätzlichen Ausführungen in [8] hin-  
gewiesen werden. Danach ist man bei Kenntnis der  
Nullstellen

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu + j\beta_\nu \quad (13)$$

des Hurwitzpolynoms  $E_1(\lambda)$  nach Gl. (7) in der  
Lage, die Schaltelemente der realisierenden Elemen-  
tarvierpole 2. bzw. 4. Grades<sup>4</sup> zu berechnen, je  
nachdem  $\lambda_\nu$  reell oder komplex ist und in letzterem  
Fall notwendig zusammen mit der konjugiert-kom-  
plexen Nullstelle  $\lambda_\nu^*$  auftritt. Die einzelnen Vierpole  
können dann in beliebiger Zahl und Reihenfolge in  
Kette geschaltet werden. Zu erwähnen ist noch, daß  
neben den in [8] angegebenen kanonischen Schal-  
tungen äquivalente kopplungsfreie und erdunsym-  
metrische Elementarvierpole

für  $\varphi = \arctan \frac{\beta}{|\alpha|} \geq 60^\circ$  als Brücken-  
T-Schaltungen,

für  $\varphi = \arctan \frac{\beta}{|\alpha|} \geq 45^\circ$  als Doppel-  
T-Schaltungen

existieren (siehe hierzu u. a. [3], [6], [7], [13]).

<sup>4</sup> Sie entsprechen nach Gl. (9) dem Grundgrad  $n = 1$   
bzw.  $n = 2$ .

<sup>3</sup> Wenn künftig der Kürze halber von Übertragungs-  
funktion, Dämpfung, Phasenmaß und Laufzeit die Rede  
sein wird, so werden hierunter grundsätzlich die Betriebs-  
größen bzw. die Gruppenlaufzeit zu verstehen sein.

Zwei Beispiele für den Frequenzverlauf der Laufzeit auf der imaginären Achse und die Lage der zugehörigen Singularitäten der Übertragungsfunktion nach Gl. (8) ist in Bild 2 wiedergegeben.

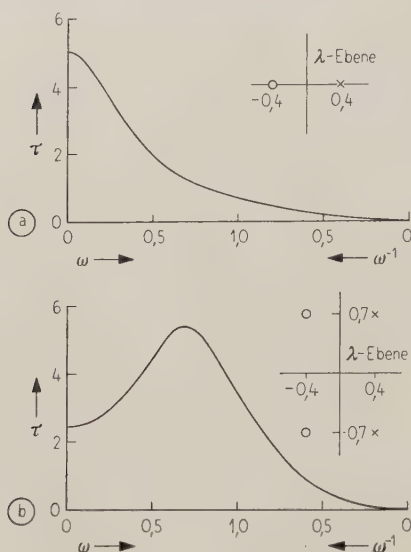


Bild 2. Laufzeitverlauf von Elementar-Allpässen sowie Verteilung der Nullstellen (○) und Pole (×) ihrer Übertragungsfunktion nach Gl. (8);

- (a) für den Grundgrad  $n = 1$ ,  
(b) für den Grundgrad  $n = 2$ .

## 2. Tschebyscheffsche rationale Funktionen (TrF)

### 2.1. Ursprung und Darstellung der (TrF)

In Verallgemeinerung der bekannten Tschebyscheffschen Polynome bewies BERNSTEIN in [2] unter anderem die Approximation der Null in einem endlichen Intervall durch gebrochen rationale Funktionen einer reellen Veränderlichen. Die Tschebyscheffschen Polynome ergeben sich hiernach als derjenige Sonderfall, in welchem sämtliche — notwendig außerhalb des Approximationsintervalls gelegenen — Pole nach unendlich rücken.

Im Hinblick auf die Anwendung dieser Bernsteinischen TrF in der Netzwerk-Synthese gab HELMAN in [5] eine Variante an, welche zu ausschließlich geraden Funktionen einer komplexen Veränderlichen führt. Wählt man hierbei das Approximationsintervall auf der imaginären  $\lambda$ -Achse für  $-1 \leq \omega \leq +1$ , so lautet die durch ihre Pole  $\lambda_v$  gegebene TrF  $R(\lambda)$ :

$$R(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \prod_{v=1}^n \left[ -(2\lambda_v^2 + 1)\lambda^2 - \lambda_v^2 + 2\lambda_v \sqrt{\lambda_v^2 + 1} \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} \right] + \prod_{v=1}^n \left[ -(2\lambda_v^2 + 1)\lambda^2 - \lambda_v^2 - 2\lambda_v \sqrt{\lambda_v^2 + 1} \lambda \sqrt{\lambda^2 + 1} \right] \right\} \prod_{v=1}^n (-\lambda^2 + \lambda_v^2) \quad (14)$$

Die Maximalabweichungen im Approximationsintervall liegen bei  $\pm 1$ . Bild 3 veranschaulicht den Verlauf einer solchen Funktion auf der positiven imaginären Achse.

Wenn auch HELMAN und SHARPE [11] von dieser Darstellungsform der TrF unmittelbar Gebrauch

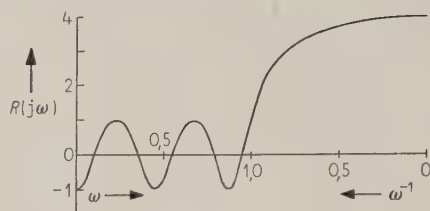


Bild 3. Verlauf einer TrF  $R(\lambda)$  vom Grundgrad  $n = 5$  auf der positiven imaginären Achse.

machten, so eignet sich doch die durch Gl. (14) gegebene verwickelte Rechenvorschrift nicht für eine Approximation der Laufzeit. Daher soll vor Eintritt in eingehendere Untersuchungen, einem Hinweis bei BENNET [1] folgend, eine andere Möglichkeit zur Darstellung von TrF gezeigt werden.

### 2.2. Herleitung der TrF durch konforme Abbildung

Durch die in [1] angegebene Transformation

$$z = \sqrt{\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}} \quad (15)$$

wird das Intervall  $-1 \leq \omega \leq +1$  der imaginären  $\lambda$ -Achse auf die vollständige imaginäre  $z$ -Achse abgebildet. Trifft man hinsichtlich des Vorzeichens der Wurzel in Gl. (15) sowie bei der inversen Transformation

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad (16)$$

die Vereinbarung, daß zugeordnete Punkte in beiden Ebenen — wenn überhaupt — vorzeichengleiche Realteile besitzen sollen, so wird die Abbildung in allen regulären Punkten eindeutig umkehrbar. Schärfer definiert bedeutet dies, daß man sich die  $\lambda$ -Ebene beiderseits der Strecke  $-1 \leq \omega \leq +1$  entlang der imaginären Achse aufgeschnitten denkt

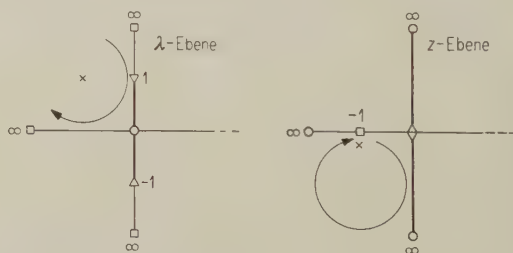


Bild 4. Veranschaulichung der Abbildungsfunktion  $z = \sqrt{(\lambda^2 + 1)/(\lambda^2 - 1)}$ .

und für die Abbildung dasjenige Blatt der Riemannschen Fläche benutzt, auf welchem  $z$  von  $\infty \rightarrow -\sqrt{2}$  für  $\lambda$  von  $0 \rightarrow -1$  geht. Bild 4 veranschaulicht dies für einige Punkte.

Stellt man jetzt in der  $z = x + jy$ -Ebene mit Hilfe eines beliebig gewählten reellen Hurwitz-

polynoms  $Q(z)$  entsprechend Gl. (8) bzw. Gl. (11) eine Funktion

$$W(z) = \frac{Q(z)}{Q(-z)}, \quad (17a)$$

$$W(z) = \prod_{v=1}^n \frac{z - z_v}{-z - z_v}, \quad \operatorname{Re}(z_v) < 0 \quad (17b)$$

als Übertragungsfunktion eines fiktiven Allpasses auf, so gilt jedenfalls

$$|W(z)|_{z=jy} \equiv 1. \quad (18)$$

Für  $0 \leq y \leq \infty$  wird der Funktionswert  $W$  bei Null beginnend den Einheitskreis im positiven Sinn durchlaufen, wobei die Anzahl der vollen Umläufe genau dem halben Grad  $n$  der Funktion entspricht.

Betrachtet man nunmehr nur den Realteil der Funktion oder, was für  $z = jy$  dasselbe ist, den in  $z$  geraden Teil der Funktion  $W(z)$ , also

$$\operatorname{Ge}\{W(z)\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q(z)}{Q(-z)} + \frac{Q(-z)}{Q(z)} \right]; \quad (19a)$$

$$\operatorname{Ge}\{W(z)\} = \quad (19b)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \prod_{v=1}^n \frac{z - z_v}{-z - z_v} + \prod_{v=1}^n \frac{-z - z_v}{z - z_v} \right], \quad \operatorname{Re}(z_v) < 0,$$

so oszilliert dieser auf der imaginären  $z$ -Achse zwischen den Werten  $+1$  und  $-1$ . Für  $-\infty \leq y \leq +\infty$  wird dabei der Wert Null genau  $2n$ -mal durchlaufen und  $(2n+1)$ -mal ein Extremwert erreicht.

Setzt man die Gl. (15) in Gl. (19b) ein, so läßt sich durch leichte Rechnung zeigen, daß die einfache Rücktransformation dieses geraden Teiles von  $W(z)$  in die  $\lambda$ -Ebene zu der in Gl. (14) angegebenen TrF  $R(\lambda)$  führt. Ist  $Q(z)$  ein Hurwitzpolynom, so gilt also eindeutig für jede hier und im folgenden betrachtete TrF:

$$R(\lambda) = \left[ \operatorname{Ge} \left\{ \frac{Q(z)}{Q(-z)} \right\} \right]_{z^2 = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}} \quad (20)$$

und umgekehrt ebenso

$$\operatorname{Ge} \left\{ \prod_{v=1}^n \frac{z - z_v}{-z - z_v} \right\} = R(\lambda)_{\lambda^2 = \frac{1}{z^2 - 1}}, \quad \operatorname{Re}(z_v) < 0. \quad (21)$$

Damit ist aber ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang gewonnen worden zwischen der Bernsteinschen TrF  $R(\lambda)$  in der  $\lambda$ -Ebene einerseits und einem Hurwitzpolynom  $Q(z)$  in der  $z$ -Ebene andererseits, welcher für die Lösung des Approximationsproblems der Laufzeit sehr förderlich sein wird.

Zu bemerken ist noch, daß diese TrF  $R(\lambda)$  unabhängig davon, ob  $n$  gerade oder ungerade, für die obere Grenze des Approximationsintervalls stets den Wert  $+1$  erreicht. Dies rührt davon her, daß dem Punkt  $\lambda = j$  in der  $z$ -Ebene der Punkt Null entspricht, an welchem mit

$$\operatorname{arc}\{W(z)\}_{z=0} = 0$$

in jedem Fall

$$\operatorname{Ge}\{W(z)\}_{z=0} = +1$$

wird.

### 2.3. Verhalten der TrF außerhalb des Approximationsintervalls

Über das Verhalten der TrF außerhalb des Approximationsintervalls auf der imaginären Achse lassen sich auch noch einige allgemein gültige Aussagen machen. Da nämlich alle  $2n$  Nullstellen der Funktion notwendig innerhalb des Approximationsintervalls liegen und die Funktion an den Intervallgrenzen den Wert  $+1$  annimmt, so bleibt sie auch außerhalb des Approximationsintervalls positiv, sofern sie nur beschränkt bleibt, d. h. keine Pole auf der imaginären  $\lambda$ -Achse besitzt. Solche Pole lassen sich dadurch ausschließen, daß man dem Hurwitzpolynom  $Q(z)$  die Nebenbedingung

$$z_v \text{ reell} < -1 \quad (22)$$

auflegt, weil nach Gl. (16) das Intervall  $-1 \leq z < 0$  der  $z$ -Ebene auf den außerhalb des Approximationsintervalls gelegenen Teil der imaginären  $\lambda$ -Achse übergeht.

Weiterhin kann man, wie von HELMAN in der  $\lambda$ -Ebene bewiesen wurde, unter Zuhilfenahme der Transformation nach Gl. (16) sehr einfach zeigen<sup>5</sup>, daß es Hurwitzpolynome  $Q(z)$  gibt, welche zu solchen TrF  $R(\lambda)$  führen, die nach Verlassen des Approximationsintervalls monoton einem endlichen — und nach obiger Aussage positiven — Wert zustreben.

Schließlich läßt sich durch Differenzieren der geeignet angesetzten Funktion nachweisen<sup>5</sup>, daß die TrF  $R(\lambda)$ , welche auf der imaginären Achse beschränkt bleiben, im Punkt unendlich mit ihrer (horizontalen) Tangente eine Berührung genau erster Ordnung besitzen.

## 3. Tschebyscheffsche Approximation der Laufzeit

### 3.1. Analyse des Approximationsproblems

In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurden die Darstellung und die Eigenschaften der Laufzeitfunktion sowie der Bernsteinschen TrF beschrieben. Da sich die Approximation einer Konstante in einem endlichen Intervall auf die Approximation der Null zurückführen läßt und approximierende Funktionen, die dies leisten — sofern es sich nur um rationale Funktionen handelt —, notwendig zur

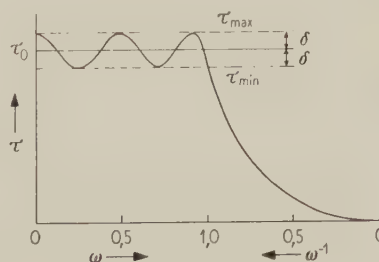


Bild 5. Verlauf der Tschebyscheffschen Laufzeitfunktion auf der positiven Frequenzachse, hier für den Grundgrad  $n = 5$ .

<sup>5</sup> Der Beweis ist hier unterdrückt, da die obige Aussage im Hinblick auf das Approximationsproblem dieser Arbeit eine zwar notwendige aber nicht hinreichende Bedingung erfüllt.

Klasse der Bernsteinschen TrF gehören, besteht die zu lösende Aufgabe im wesentlichen aus einer Synthese beider genannten Funktionen-Klassen.

Wenn daher eine Funktion  $t(\lambda)$  mit dem Grundgrad  $n$  nach Gl. (12) eine Tschebyscheffsche Laufzeitfunktion im Sinne dieser Arbeit sein soll, d. h. wenn sie entsprechend Bild 5 im Intervall  $-1 \leq \omega \leq +1$  Tschebyscheffsch geebnet ist und zwischen den Werten  $\tau_0 \pm \delta$  derart schwankt, daß sie im Inneren des Intervalls  $n$ -mal den Maximalwert  $\tau_0 + \delta$  und hiermit alternierend  $(n - 1)$ -mal sowie an den Intervallgrenzen den Minimalwert  $\tau_0 - \delta$  annimmt, so gilt notwendig und unmittelbar:

#### 1. Die Funktion

$$R(\lambda) = \frac{1}{\delta} [\tau_0 - t(\lambda)] \quad (23)$$

ist eine Bernsteinsche TrF im Sinne der Gl. (14) vom Grundgrad  $n$ , welcher sich mit Gl. (20) ein Hurwitzpolynom  $Q(z)$  vom Grundgrad  $n$  zuordnen läßt.

2. Die TrF  $R(\lambda)$  nach Gl. (23) strebt auf der imaginären Achse nach Verlassen des Approximationsintervalls für  $\lambda \rightarrow \infty$  monoton dem Wert  $\tau_0/\delta$ , d. h. einem endlichen positiven Wert zu, weil  $t(\lambda)$  hierfür nach Satz 1 monoton gegen den Wert Null strebt.

3. Die TrF  $R(\lambda)$  nach Gl. (23) besitzt im Punkt unendlich mit ihrer Tangente eine Berührung genau erster Ordnung weil  $t(\lambda)$  hier nach Satz 1 eine genau zweifache Nullstelle besitzt.

4. Die Pole der TrF  $R(\lambda)$  nach Gl. (23) haben je nachdem, ob sie in der linken oder rechten Halbebene liegen, das Residuum  $-1/\delta$  bzw.  $+1/\delta$ , weil die von  $t(\lambda)$  dort nach Satz 2 mit Gl. (12) das Residuum  $+1$  bzw.  $-1$  besitzen.

Nicht unmittelbar aber, wie sich durch einfache Rechnung zeigen läßt, ergeben sich ebenso notwendig die weiteren Folgerungen:

5. Die zu approximierende Laufzeit (Soll-Laufzeit)  $\tau_0$  ist von der die Approximationsgüte beschreibenden Schwankung  $\delta$  nicht unabhängig.

6. Die die gesamte Laufzeitfunktion bestimmenden Singularitäten  $\lambda_v$  stehen mit der Schwankung  $\delta$  allein in wohl definierter Beziehung.

#### Zu 5:

Überführt man  $R(\lambda)$  nach Gl. (21) in die  $z$ -Ebene und bildet dort den Funktionswert für  $z = -1$ , welchem in der  $\lambda$ -Ebene  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\lambda)$  entspricht, so erhält man wegen  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t(\lambda) = 0$  aus Gl. (23) für  $\lambda = \infty$

$$\tau_0 = \frac{\delta}{2} \left( \prod_{v=1}^n \frac{z_v + 1}{z_v - 1} + \prod_{v=1}^n \frac{z_v - 1}{z_v + 1} \right). \quad (24)$$

<sup>6</sup> Es muß nachdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die hiermit eingeführte Schwankung  $\delta$  im Gegensatz zu anderen Autoren nicht auf  $\tau_0$  bezogen, sondern von der gleichen 'Dimension' wie die normierte Soll-Laufzeit  $\tau_0$  ist. Der Grund ist darin zu sehen, daß in den meisten Fällen die absolute und nicht die relative Laufzeitschwankung von technischem Interesse ist.

#### Zu 6:

Nach Punkt 4 gilt mit Gl. (23) für den  $\mu$ -ten Pol in der linken und rechten Halbebene

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm \lambda_\mu} (\pm \lambda - \lambda_\mu) R(\lambda) = \mp \frac{1}{\delta}. \quad (25)$$

Da sich das Residuum einer Funktion durch den Kehrwert des Differentialquotienten vom Kehrwert der an der betrachteten Stelle singulären Funktion ausdrücken läßt, kann man schreiben

$$\left[ \frac{d}{d\lambda} R^{-1}(\lambda) \right]_{\lambda = \pm \lambda_\mu} = \mp \delta. \quad (26)$$

Geht man nun mit Gl. (21) in die  $z$ -Ebene über, so wird

$$\left( \frac{d}{dz} \frac{1}{\text{Ge} \left\{ \prod_{v=1}^n \frac{z - z_v}{-z - z_v} \right\}} \frac{dz}{d\lambda} \right)_{z = \pm z_\mu} = \mp \delta, \quad \text{Re}(z_v) < 0. \quad (27)$$

Ersetzt man den Differentialquotienten  $dz/d\lambda$  durch sein nach Gl. (15) bzw. Gl. (16) berechenbares Äquivalent in  $z$  und geht wiederum auf die Residuendarstellung zurück, so erhält man mit leichter Umformung

$$\lim_{z \rightarrow \pm z_\mu} (\pm z - z_\mu) \text{Ge} \left\{ \prod_{v=1}^n \frac{z - z_v}{-z - z_v} \right\} = \pm \frac{1}{\delta} \left[ \frac{(z^2 - 1)^{3/2}}{z} \right]_{z = \pm z_\mu}. \quad (28)$$

Läßt man nunmehr die Beschränkung auf den geraden Teil des Produktes fallen und bildet den Grenzwert für  $z = -z_\mu$ , so ergibt sich unter Beachtung der Verdopplung des Residuums nach kurzer Rechnung

$$F_1 \equiv \frac{(z_1^2 - 1)^{3/2}}{z_1^2} + \delta = 0, \quad n = 1, \quad (29a)$$

$$F_\mu \equiv \frac{(z_\mu^2 - 1)^{3/2}}{z_\mu^2} + \delta \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq \mu}}^n \frac{z_\mu + z_v}{-z_\mu + z_v} = 0, \quad (29b)$$

$$\mu = 1, 2, \dots, n \text{ für } n > 1.$$

Wegen der im Abschnitt 2.2 getroffenen Vorzeichenvereinbarung ist das Vorzeichen der Quadratwurzel so zu wählen, daß

$$\text{Re} [(z_\mu^2 - 1)^{1/2}] < 0$$

wird.

Dieser durch Gl. (29) definierte Zusammenhang ist mit den im Punkt 4 angegebenen Eigenschaften identisch. Da aber diese Eigenschaften nach Satz 2 einerseits für das Vorhandensein einer Laufzeitfunktion  $t(\lambda)$  nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind und andererseits das Tschebyscheffsche Verhalten durch den Ansatz der Gl. (23) mit einer TrF  $R(\lambda)$ , genauer durch Übergang von  $R(\lambda)$  in Gl. (26) auf den geraden Teil des Quotienten aus einem Hurwitz- und einem Antihurwitzpolynom der  $z$ -Ebene in Gl. (27) notwendig und hinreichend begründet ist, resultiert die Erfüllung der Gl. (29a, b) als alleinige notwendige und hinreichende Forderung für das Vorhandensein einer Tschebyscheffschen Laufzeitfunktion.

Die Gl. (29 a, b) sind demnach charakteristisch für das Approximationsproblem und stellen bei Vorgabe des Grundgrades  $n$  und der Schwankung  $\delta$  für  $n > 1$  ein System von  $n$  simultanen Bestimmungs-gleichungen für die  $n$  unbekannten Singularitäten  $z_v$  dar.

### 3.2. Konstruktion der Tschebyscheffschen Laufzeit-funktion

Nach Wahl bestimmter Größen  $n$  und  $\delta$  liege nunmehr ein Satz von  $n$  Nullstellen  $z_v$  eines reellen Hurwitzpolynoms  $Q(z)$  vom Grade  $n$  vor, der die Gl. (29 a, b) erfüllt.

Diese  $z_v$  genügen also den Nebenbedingungen

- a)  $\operatorname{Re}(z_v) < 0$ ,
- b) reelle  $z_v < -1$ ,
- c) alle  $z_v$  verschieden.

Dann ist das hiermit gebildete Polynom  $Q(z)$  ein Hurwitzpolynom, welches mit Gl. (20) zu einer solchen TrF  $R(\lambda)$  führt, die der Residuenbedingung nach Gl. (26) gehorcht. Mit Hilfe der nach Gl. (24) berechenbaren Soll-Laufzeit  $\tau_0$  kommt man in Umkehrung der Gl. (23) zu der gesuchten Laufzeitfunktion

$$t(\lambda) = \tau_0 - \delta \cdot R(\lambda). \quad (30)$$

Praktisch wird es genügen, die Werte  $z_v$  nach Gl. (16) in die  $\lambda$ -Ebene zu transformieren und die so gewonnenen  $\lambda_v$  in die Gl. (12) einzusetzen. Wegen der getroffenen Vorzeichenvereinbarung wird mit obiger Bedingung a) gelten

$$\operatorname{Re}(\lambda_v) < 0.$$

Mit der Bedingung b) werden (negativ) reelle  $z_v$  in (negativ) reelle  $\lambda_v$  übergehen und mit c) werden alle  $n$   $\lambda_v$  verschieden sein.

### 3.3. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Die durch das Approximationsproblem gestellte Aufgabe ist nunmehr zurückgeführt auf das Auffinden von  $n$  Zahlenwerten  $z_v$ , welche die Nullstellen eines reellen Hurwitzpolynoms  $Q(z)$  vom Grad  $n$  sind und den Gl. (29 a, b) genügen. Gleichzeitig ist bewiesen, daß es andere Lösungen des Problems nicht geben kann.

Zu zeigen bliebe noch, daß die geschilderte Auflösung des Systems (29) immer und eindeutig möglich ist. Es besteht die starke Vermutung, daß dies der Fall ist. Sie gründet sich nicht nur auf die Erfahrung bei der numerischen Rechnung, deren Ergebnisse im einzelnen im Kapitel 4 behandelt und im Anhang III wiedergegeben sind, sondern wesentlich auch auf die Natur des ganzen Problems.

Man kann nämlich immer erreichen, daß eine nach Gl. (12) gebildete Laufzeitfunktion  $t(\lambda)$  auf der imaginären Achse eine dem Grundgrad  $n$  gleiche Anzahl von Maximalwerten annimmt. Stetigkeitsbetrachtungen legen es nahe, daß diese Maxima sowie die zwischen ihnen gelegenen Minima jeweils unter sich gleich hoch gemacht werden können (Existenz).

Einer auf solche Weise Tschebyscheffsch geebneten Laufzeitfunktion  $t(\lambda)$  entspricht aber nach Gl. (12) in eindeutiger Weise ein Satz von  $n$  Singularitäten  $\lambda_v$  und diesem wiederum genau eine mittlere (Soll-)Laufzeit  $\tau_0$  bzw. eine Schwankung  $\delta$ , welche beide nach Punkt 5 des Abschnittes 3.1 voneinander abhängig sind. Daher erscheint es gerechtfertigt anzunehmen, daß bei Vorgabe des Grundgrades  $n$  und der Schwankung  $\delta$  immer nur eine Lösung des Approximationsproblems existiert. Dann aber gibt es — abgesehen von einem hinzugefügten konstanten Faktor — immer ein und nur ein reelles Hurwitzpolynom  $Q(z)$ , dessen Nullstellen den Bedingungen (29) genügen (Eindeutigkeit).

### 3.4. Explizite Lösung für $n = 1$ und $n = 2$

#### a) $n = 1$

In diesem Fall ist nur die Gl. (29 a) aufzulösen. Durch Einsetzen von Gl. (15) kann man sofort in die  $\lambda$ -Ebene übergehen und erhält nach kurzer Zwischenrechnung für die Bestimmung der negativ-reellen Singularität  $\lambda_1$  die Gleichung

$$\lambda_1^3 + \lambda_1 + \frac{1}{\delta} = 0. \quad (31)$$

Auch die Soll-Laufzeit  $\tau_0$  läßt sich noch sehr einfach angeben. Wie Bild 2a zeigt, liegt das Maximum bei  $\omega = 0$  und die leicht berechenbare Laufzeit beträgt hier

$$\tau(0) = \tau_{\max} = \frac{-2}{\lambda_1}.$$

Da nach Definition

$$\tau_0 = \tau_{\max} - \delta$$

ist, erhält man nach Eliminieren von  $\delta$  aus Gl. (31) für die Soll-Laufzeit

$$\tau_0 = \frac{2\lambda_1^2 + 1}{-\lambda_1(\lambda_1^2 + 1)}. \quad (32)$$

#### b) $n = 2$

In diesem Fall existiert neben der Singularität  $z_1$  für  $\mu = 2$  noch die konjugiert-komplexe  $z_2 = z_1^*$ . Die aus Gl. (29 b) abzuleitende Gleichung (siehe auch Abschnitt 3.5) lautet

$$F_1 = \frac{(z_1^2 - 1)^{3/2}}{z_1^2} + \delta \frac{z_1 + z_1^*}{-z_1 + z_1^*} = 0. \quad (33)$$

Eine so einfache Lösung wie für  $n = 1$  ist hier bereits nicht mehr möglich, doch läßt sich der geometrische Ort für alle Singularitäten in der  $\lambda$ -Ebene bestimmen. Mit

$$z_1 + z_1^* = 2 \operatorname{Re}(z_1) \quad \text{und} \quad -z_1 + z_1^* = -2 \operatorname{Im}(z_1)$$

wird der zweite Summand in Gl. (33) rein imaginär. Infolgedessen gilt für den ersten

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{(z_1^2 - 1)^{3/2}}{z_1^2} \right] = 0.$$

Geht man wieder mit Einsetzen von Gl. (15) in die  $\lambda$ -Ebene über, so erhält man

$$\operatorname{Re}(\lambda_1^3 + \lambda_1) = 0.$$

Setzt man  $\lambda_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ , so ergibt sich

$$\alpha_1(\alpha_1^2 - 3\beta_1^2 + 1) = 0.$$

Da die Lösung  $\alpha_1 = 0$  auszuschließen ist, erhält man als geometrischen Ort aller Lösungen die Hyperbel mit der Mittelpunkts-Gleichung

$$\alpha_1^2 - \frac{\beta_1^2}{(1/\sqrt{3})^2} = -1. \quad (34)$$

Der im II. Quadranten liegende Hyperbelast ist in Bild 6 wiedergegeben.

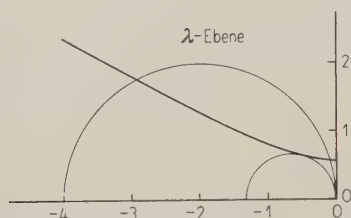


Bild 6. Geometrische Orte der Lösungen für den Grundgrad  $n = 2$ ; Hyperbelast: Singularität  $\lambda_1$ , Halbkreise: spezielles Laufzeitminimum  $\tau_{\min} = \tau_0 - \delta$ .

Von allen weiteren noch elementar berechenbaren Ergebnissen für den Spezialfall des Grundgrades  $n = 2$  sei — seiner Einfachheit halber ohne Ableitung — der geometrische Ort für vorgegebene Minimal-Laufzeit

$$\tau_{\min} = \tau_0 - \delta$$

angegeben. Es ist dies der Kreis mit der Gleichung

$$\left(\alpha_1 - \frac{2}{\tau_{\min}}\right)^2 + \beta_1^2 = \left(\frac{2}{\tau_{\min}}\right)^2; \quad (35)$$

zwei dieser Kreise sind in Bild 6 angedeutet. Man erkennt daraus, daß bei Vorgabe von  $\tau_{\min}$  — wenn überhaupt — dann im allgemeinen zwei und nur in dem Grenzfall der Berührung von Kreis und Hyperbel genau eine Lösung existiert ( $\tau_{\min} = 3,0$ ). Daher erscheint es unzweckmäßig wie in [5], die Minimal-Laufzeit  $\tau_{\min}$  als freien Parameter einzuführen.

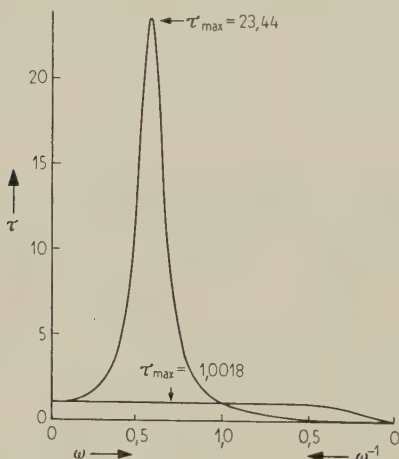


Bild 7. Frequenzverläufe der Laufzeit für zwei spezielle Lösungen für den Grundgrad  $n = 2$  mit  $\tau_{\min} = 1,0$ . In dem einen Fall ist die Schwankung wegen  $\delta = 0,00884$  nicht mehr erkennbar.

Der in Bild 6 gezeichnete größere Kreis entspricht der einen von HELMAN angegebenen Lösung für  $\tau_{\min} = 1,0$ :

$$\lambda_{11} = -2,914213562 + j1,778823645.$$

Es existiert für den gleichen Wert  $\tau_{\min} = 1,0$  aber noch die zweite Lösung

$$\lambda_{12} = -0,085786438 + j0,579470824.$$

Bild 7 zeigt hierzu die Verläufe der Laufzeit.

### 3.5. Aufstellung eines linearen Gleichungssystems zur iterativen Lösung

Für den allgemeinen Fall, d. h. jedenfalls ab  $n > 2$ , ist eine explizite Lösung des Systems nach Gl. (29b) nicht mehr möglich, da die Gleichungen nicht nur nicht linear, sondern auch irrational sind. Bei Anwendung des Newtonschen Näherungsverfahrens für mehrere Veränderliche gelingt es aber, die Koeffizienten-Matrix für ein lineares Gleichungssystem aufzustellen. Geht man hierzu von  $n$  Näherungswerten  $z_{v0}$  aus, so gilt für die  $\mu$ -te Gleichung

$$\Delta F \equiv \sum_{v=1}^n \left( \frac{\partial F_{\mu}}{\partial z_v} \right)_{z_v=z_{v0}} \Delta z_{v0} = -F_{\mu}(z_{v0}). \quad (36)$$

In dem so gewonnenen linearen Gleichungssystem stellen die Korrekturen  $\Delta z_{v0}$  die Unbekannten dar, während die  $n$ -reihige quadratische Koeffizienten-Matrix im wesentlichen durch die partiellen Ableitungen der Funktion  $F_{\mu}(z_v)$  nach den einzelnen Singularitäten  $z_v$  gegeben ist. Die rechten Seiten des Systems sind, da es sich bei den  $z_{v0}$  nicht um Lösungen, sondern nur um Näherungen handelte, nicht Null, sondern müssen dem negativen Wert der Funktion  $F_{\mu}(z_{v0})$  gleichgesetzt werden.

Da nun im allgemeinen die Singularitäten  $z_v$  komplex sind, werden auch beide Seiten der Gl. (36) komplexwertig; effektiv erhält man also aus jeder der  $n$  Gleichungen zwei, nämlich eine Realteil- und eine Imaginärteilgleichung. Andererseits aber läßt sich leicht zeigen, daß jede Gleichung, in der  $z_{\mu}$  den Wert  $z_i^*$  erhält, gegenüber derjenigen für  $z_{\mu} = z_i$  keine neue Aussage mehr, sondern nur eine Überführung in den konjugiert-komplexen Wert bringt. Daher bleibt es schließlich doch bei nur insgesamt  $n$  linearen und reellen Realteil- bzw. Imaginärteilgleichungen.

Nach Auflösung des Systems erhält man über die  $n$  errechneten Werte  $\Delta z$  neue, verbesserte Werte für die Singularitäten; nach dem ersten Schritt wird also

$$z_{v1} = z_{v0} + \Delta z_{v0}. \quad (37)$$

Auf diese Weise ist ein iteratives Verfahren gewonnen, das — wenn nur hinreichend brauchbare Näherungen benutzt werden — konvergieren muß, da nach den Ergebnissen des Abschnittes 3.3 offenbar genau eine Lösung des Problems existiert.

Zur Bestimmung der partiellen Ableitungen nach Gl. (36) seien noch im einzelnen folgende Rechenvorschriften angegeben:

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial z_\nu} = u_{\mu\nu} + j v_{\mu\nu} \begin{cases} \nu = i \neq \mu: & -\delta \frac{2z_\mu}{-z_\mu^2 + z_i^2} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n \frac{z_\mu + z_\nu}{-z_\mu + z_\nu}, \\ \nu = i = \mu: & \frac{(z_\mu^2 - 1)^{1/2} (z_\mu^2 + 2)}{z_\mu^3} + \delta \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \mu}}^n \frac{2z_\kappa}{-z_\mu^2 + z_\kappa^2} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n \frac{z_\mu + z_\nu}{-z_\mu + z_\nu}. \end{cases} \quad (38a)$$

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial z_\nu} = u_{\mu\nu} + j v_{\mu\nu} \begin{cases} \nu = i \neq \mu: & -\delta \frac{2z_\mu}{-z_\mu^2 + z_i^2} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n \frac{z_\mu + z_\nu}{-z_\mu + z_\nu}, \\ \nu = i = \mu: & \frac{(z_\mu^2 - 1)^{1/2} (z_\mu^2 + 2)}{z_\mu^3} + \delta \sum_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa \neq \mu}}^n \frac{2z_\kappa}{-z_\mu^2 + z_\kappa^2} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n \frac{z_\mu + z_\nu}{-z_\mu + z_\nu}. \end{cases} \quad (38b)$$

Aus den so berechneten Ableitungen werden die Elemente  $a_{\mu\nu}$  der quadratischen Koeffizienten-Matrix  $A$  sowie entsprechend Gl. (36) die Elemente  $a_\mu$  des Spaltenvektors  $a$  der rechten Seite bestimmt. Im einzelnen ist also

$$A \cdot \Delta z = a \quad (39a)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\nu} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\nu} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\nu} & \dots & a_{\mu n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\nu} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_\mu \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (39b)$$

Zur Aufteilung der Gl. (36) in Realteil- und Imaginärteilgleichung dient der Ansatz

$$\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z = (u + jv)(\Delta x + j\Delta y) = u\Delta x - v\Delta y + j(v\Delta x + u\Delta y). \quad (40)$$

$$\text{Ferner sei} \quad F_\mu = U_\mu + jV_\mu. \quad (41)$$

Im allgemeinen hat man jeder Singularität  $z_\nu$  zwei Matrixspalten zuzuordnen, die erste der Unbekannten  $\Delta x$ , die zweite der Unbekannten  $\Delta y$ . Während für reelle  $z_\nu$  die zweite Spalte entfällt, faßt man bei komplexen Werten  $z_\nu$  die Spalten von  $z_\nu$  mit denen von  $z_\nu^*$  zusammen.

Für  $z_\mu$  reell ergeben sich damit die Elemente der  $\mu$ -ten Zeile wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} a_{\mu\nu} &= u_{\mu\nu} && \text{für } z_\nu \text{ reell,} \\ a_{\mu\nu} &= u_{\mu\nu} + u_{\mu, \nu+1} \\ a_{\mu, \nu+1} &= -(v_{\mu\nu} - v_{\mu, \nu+1}) \\ a_\mu &= -U_\mu. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für } z_\nu \text{ komplex} \\ &\text{und } z_{\nu+1} = z_\nu^* \end{aligned} \quad (42a)$$

Für  $z_\mu$  komplex ergeben sich die Elemente zweier Zeilen, der  $\mu$ -ten und der  $(\mu + 1)$ -ten Zeile, zu

$$\left. \begin{aligned} a_{\mu\nu} &= u_{\mu\nu} \\ a_{\mu+1, \nu} &= v_{\mu\nu} \\ a_{\mu\nu} &= u_{\mu\nu} + u_{\mu, \nu+1}, & a_{\mu, \nu+1} &= -(v_{\mu\nu} - v_{\mu, \nu+1}) \\ a_{\mu+1, \nu} &= v_{\mu\nu} + v_{\mu, \nu+1}, & a_{\mu+1, \nu+1} &= u_{\mu\nu} - u_{\mu, \nu+1} \\ a_\mu &= -U_\mu, \\ a_{\mu+1} &= -V_\mu. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für } z_\nu \text{ reell,} \\ &\text{für } z_\nu \text{ komplex} \\ &\text{und } z_{\nu+1} = z_\nu^*, \end{aligned} \quad (42b)$$

Die der  $\nu$ -ten Spalte entsprechende Lösung des Systems ist dann die Korrekturgröße  $\Delta x_\nu$  der reellen Singularität  $z_\nu$  bzw. die Korrekturgröße  $\Delta x_\nu$  des Realteils und die der  $(\nu + 1)$ -ten Spalte entsprechende Lösung ist die Korrekturgröße  $\Delta y_\nu$  des Imaginärteils der komplexen Singularität  $z_\nu$ .

### 3.6. Auflösung des Gleichungssystems

Hat man die Koeffizientenmatrix sowie die Funktionswerte der rechten Seite einmal aufgestellt, so

kann zur Auflösung grundsätzlich jedes der bekannten Verfahren benutzt werden. Da der Grad der approximierenden Funktion und damit die Ordnung des Gleichungssystems in allen praktischen Fällen nicht beliebig hoch sein wird, eignet sich das Eliminations-Verfahren nach GAUSS-BANACHIEWICZ [14] hierfür sehr gut.

Im übrigen aber darf an dieser Stelle auf das einschlägige Schrifttum über Matrizenrechnung verwiesen werden.

### 3.7. Erweiterung auf das allgemeine endliche Approximationsintervall

Soll im Gegensatz zur bisherigen Approximation das Intervall bei einer endlichen, von Null verschiedenen Frequenz  $f_{-A}$  beginnen und sich bis zur oberen, ebenfalls endlichen Frequenz  $f_A$  erstrecken, so ist eine von Gl. (15) abweichende Transformation zu benützen<sup>7</sup>.

Zunächst empfiehlt es sich, als Bezugsfrequenz  $f_B$  das geometrische Mittel der Intervallgrenzen zu verwenden

$$f_B = \sqrt{f_{-A} f_A}. \quad (43)$$

Nach der Normierung entsprechend Abschnitt 1.2 sind die Intervallgrenzen  $\omega_{-A}$  und  $\omega_A$  zueinander reziprok:

$$\omega_{-A} \omega_A = 1. \quad (44)$$

Die jetzt geforderte Abbildung der beiden Approximationsintervalle

$$-\omega_A \leq \omega \leq -\omega_{-A} \quad \text{und} \quad \omega_{-A} \leq \omega \leq \omega_A$$

auf die vollständige imaginäre  $z$ -Achse leistet die Transformation

$$z = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \omega_A^2}{\lambda^2 + \omega_{-A}^2}}. \quad (45)$$

mit der inversen

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega_A^2 - z^2 \omega_{-A}^2}{z^2 - 1}}. \quad (46)$$

Sämtliche in den Abschnitten 3.1 bis 3.3 angestellten Überlegungen gelten sinngemäß auch hier mit der einzigen Ausnahme, daß der Grundgrad  $n$  jetzt notwendig gerade sein muß. Wenn auch bei tiefpaßartigem Tschebyscheffischem Laufzeitverhalten genau eine reelle Singularität möglich ist, so erkennt man bereits aus Bild 2a, daß eine solche bei bandpaßartigem Verhalten nicht mehr zugelassen werden kann.

<sup>7</sup> Von dieser Möglichkeit wurde für das Dämpfungsverhalten bereits in [10] Gebrauch gemacht.

Führt man nunmehr den aus Gl. (46) gewonnenen Differentialquotienten  $dz/d\lambda$  an Stelle desjenigen von Gl. (16) in die Gl. (27) ein, so erhält man nach kurzer Rechnung an Stelle von Gl. (29b) für bandpaßartiges Laufzeitverhalten die allgemeinere Gleichung

$$F_\mu \equiv \frac{\sqrt{\omega_A^2 - \omega_A^{-2} z_\mu^2} (z_\mu^2 - 1)^{3/2}}{\omega_A^2 - \omega_A^{-2} z_\mu^2} + \delta \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \mu}}^n \frac{z_\mu + z_r}{-z_\mu + z_r} = 0, \\ \mu = 1, 2, \dots, n; \quad n \text{ gerade.} \quad (47)$$

Sie unterscheidet sich von Gl. (29b) nur durch einen Faktor beim ersten Summanden, welcher für

$$\omega_A \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \omega_A^{-1} \rightarrow 0$$

notwendig zu eins wird. Damit ist die — allein schon der Anschaulichkeit halber — zu Anfang gezeigte Approximation tiefpaßartigen Laufzeitverhaltens als ein Sonderfall der allgemeinen Gl. (47) gekennzeichnet.

An Stelle der Gl. (38b) tritt jetzt die partielle Ableitung für  $v = i = \mu$ :

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial z_\mu} = u_{\mu\mu} + j v_{\mu\mu} = \frac{(z_\mu^2 - 1)^{1/2}}{\omega_A^2 - \omega_A^{-2} z_\mu^2} \cdot \left[ (\omega_A^2 - \omega_A^{-2} z_\mu^2)^{1/2} \frac{z_\mu^2 + 2}{z_\mu^3} - \frac{\omega_A^{-2} (z_\mu^2 - 1)}{(\omega_A^2 - \omega_A^{-2} z_\mu^2)^{1/2} z_\mu} \right] + \\ + \delta \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq \mu}}^n \frac{2 z_\mu}{-z_\mu^2 + z_r^2} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq \mu}}^n \frac{z_\mu + z_v}{-z_\mu + z_v}, \quad (48)$$

während die in überwiegender Zahl auftretenden Ableitungen für  $v = i \neq \mu$  auch hier genau der in Gl. (38a) angegebenen Form entsprechen.

In Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse und gestützt auf die im Abschnitt 3.3 geäußerte Vermutung sowie auf die Erfahrungen an Hand praktischer Berechnungen erscheint somit gerechtfertigt der

**Satz 3:** Für eine Laufzeitfunktion  $t(\lambda)$  mit Tschebyscheffschem Verhalten innerhalb eines endlichen Intervalles auf der positiven imaginären Achse existiert bei Vorgabe des Grades und der Approximationsgüte genau eine Lösung.

### 3.8. Realisierung durch dämpfende Netzwerke

Bisher wurde in der Arbeit ausschließlich die Realisierung der Tschebyscheffschen Laufzeit durch Allpässe angenommen. Demgegenüber ist es vom Laufzeitverhalten her gesehen jederzeit möglich, einen realisierenden Tiefpaß oder Bandpaß mit beliebig gelegenen Dämpfungspolen zu entwerfen, wenn nur die Dämpfungsforderungen hierdurch erfüllt werden können.

Da die für einen Reaktanzvierpol zulässigen Dämpfungspole zur Laufzeit keinen Beitrag liefern, können sie im folgenden außer acht gelassen werden. Somit genügt es, das Zählerpolynom  $E(\lambda)$  der Übertragungsfunktion  $H(\lambda)$  nach Gl. (6) allein zu betrachten.

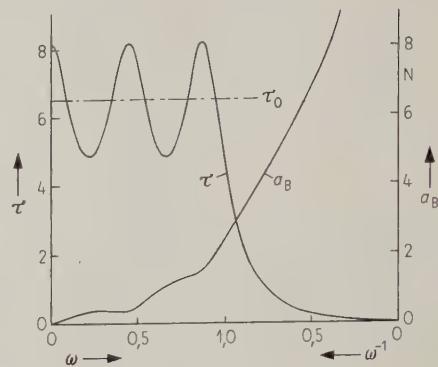


Bild 8. Laufzeit- und Dämpfungsverlauf des Tiefpasses  $n = 5$ ,  $\tau_0 = 6,5$ ,  $\delta = 1,629$ .

Ohne auf Einzelheiten in der Herleitung einzugehen, bedeutet dies praktisch, daß das angegebene Lösungsverfahren unverändert beibehalten werden kann, wenn man nur an Stelle der erwünschten Schwankung  $\delta$  formal  $2\delta$  einführt.

Bild 8 zeigt Laufzeit- und Dämpfungsverlauf für einen Polynom-Tiefpaß vom Grade  $n = 5$  (er besitzt dieselbe Schwankung  $\delta$  wie der im Abschnitt 4.2 näher zu untersuchende Allpaß). Zu dem im Kapitel 4 ausführlich beschriebenen Beispiel eines Allpasses mit bandpaßartigem Laufzeitverhalten (siehe Bild 12) ist Laufzeit- und Dämpfungsverlauf des entsprechenden Polynom-Bandpasses gleicher Schwankung  $\delta$  in Bild 9 wiedergegeben.

Man erkennt aus den zwei Beispielen, daß diese Filter durch Hinzufügen geeignet gewählter Dämpfungspole gegebenenfalls auch praktisch auftretende Forderungen erfüllen können. Gelingt dieses aber, so kommt man hiermit zu Minimum-Phasen-Netzwerken, welche in jedem Fall auch ein Minimum an Schaltelemente-Aufwand gewährleisten.

Andererseits ist es möglich, zu einem zunächst nach der Vorschrift für Allpässe entworfenen Tschebyscheffschen Laufzeitverhalten die Dämpfungspole nach [1] derart zu bestimmen, daß im gleichen Approximationsintervall die Dämpfung ebenfalls Tschebyscheffsch verläuft. Über den Dämpfungs-

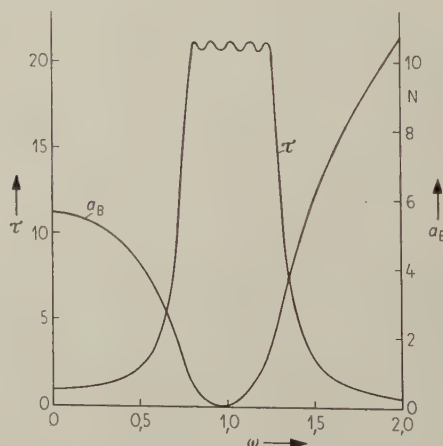


Bild 9. Laufzeit- und Dämpfungsverlauf des Bandpasses  $n = 10$ ,  $\delta = 0,25$ ,  $\omega_A = 1,25$ .

verlauf außerhalb des Approximationsintervalls kann dann nicht mehr verfügt werden. Doch soll auf diese sicherlich bedeutsamen, aber von dem eigentlichen Approximationsproblem der Arbeit wegführenden Sonderfälle nicht weiter eingegangen werden.

4. Diskussion praktischer Ergebnisse

4.1. Überblick über die gerechneten Fälle

So einfach die im Kapitel 3 gewonnene allgemeine Lösungsgleichung (47) auch erscheinen mag, bedeutet sie im konkreten Fall einer auszuführenden Approximation doch erhebliche Rechenarbeit, sofern man auf die herkömmlichen Hilfsmittel angewiesen ist. Hier konnten auf der PERM mit Hilfe eines allgemein gehaltenen Maschinenprogrammes zahlreiche Approximationen ausgeführt werden.

Die praktisch erzielten Ergebnisse bestätigten den theoretischen Ansatz in jeder Beziehung. Ein wesentlicher Teil der approximierten Fälle ist zu einem Katalog zusammengestellt und im Anhang III aufgenommen worden. Dabei handelt es sich um die Allpässe vom Grundgrad  $n = 1$  bis  $n = 10$  mit der normierten Schwankung  $\delta = 0,01; 0,02, \dots, 0,1$  sowie ab  $\delta = 0,1$  in Stufen von  $0,1$  bis  $\delta = 0,5$ . Mit diesen Tabellen-Eingangswerten können u. a. die Singularitäten  $\lambda_s$  des jeweiligen Hurwitzpolynoms  $E_1(\lambda)$  entsprechend Gl. (7) zum unmittelbaren Gebrauch für den Benutzer entnommen werden.

4.2. Konvergenzbetrachtungen, Wahl der Näherungen

Wie die Erfahrungen zeigen, konvergiert das angegebene Verfahren sehr rasch, sofern nur einigermaßen sinnvolle Näherungswerte für die Singularitäten vorgegeben werden.

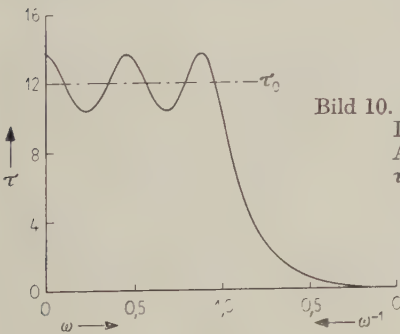


Bild 10. Tschebyscheffscher Laufzeitverlauf des Allpasses  $n = 5$ ,  $\tau_0 = 12$ ,  $\delta = 1,629$ .

Zur näheren Untersuchung möge das Beispiel des Bildes 10 vom Grundgrad  $n = 5$  mit  $\delta = 1,629$  und  $\tau_0 = 12$  dienen. Die zu erzielende Genauigkeit sei durch die Approximation erreicht, wenn die Korrekturen jeder der Komponenten der Singularitäten in  $z$  kleiner als  $10^{-7}$  geworden sind.

Aus der Tabelle I sind die benutzten Näherungen, die Zahl der jeweils benötigten Iterationsschritte sowie als weiteres Kriterium für die Konvergenz der Quotient  $q$  aus der sich bei jedem Schritt nach Gl. (36) ergebenden Norm

$$a = \sqrt[n]{\sum_{\mu=1}^n |F_{\mu}|^2}$$

Tabelle I.

Angaben zur Konvergenz des Verfahrens für  $n = 5$  und  $\delta = 1,629$  bei Vorgabe verschiedener Näherungen:

- a) Singularitäten nach DARLINGTON,
- b) Tschebyscheffsch mit  $\delta = 0,5$ ,
- c) die fünf 10. Einheitswurzeln in der linken Halbebene,
- d) die fünf auf einer Geraden liegenden Punkte  $\lambda = -1 \pm j0,4k$  ( $k = 0,1, 2$ ).

Fall	a	b	c	d
$q_1$	$10^0 \cdot 0,4$	$10^1 \cdot 0,2$	$10^1 \cdot 0,3$	$10^1 \cdot 0,3$
$q_2$	$10^{-1} \cdot 0,2$	$10^0 \cdot 0,5$	$10^1 \cdot 0,1$	$10^1 \cdot 0,1$
$q_3$	$10^{-3} \cdot 0,9$	$10^0 \cdot 0,2$	$10^1 \cdot 0,1$	$10^1 \cdot 0,1$
$q_4$	$10^{-5} \cdot 0,4$	$10^{-1} \cdot 0,3$	$10^1 \cdot 0,1$	$10^1 \cdot 0,1$
$q_5$		$10^{-2} \cdot 0,1$	$10^1 \cdot 0,1$	$10^1 \cdot 0,1$
$q_6$		$10^{-5} \cdot 0,5$	$10^0 \cdot 0,5$	$10^1 \cdot 0,1$
$q_7$			$10^0 \cdot 0,4$	$10^1 \cdot 0,1$
$q_8$			$10^0 \cdot 0,1$	$10^1 \cdot 0,1$
$q_9$			$10^{-1} \cdot 0,2$	$10^1 \cdot 0,4$
$q_{10}$			$10^{-3} \cdot 0,4$	$10^0 \cdot 0,1$
$q_{11}$			$10^{-2} \cdot 0,1$	$10^0 \cdot 0,7$
$q_{12}$				$10^0 \cdot 0,3$
$q_{13}$				$10^0 \cdot 0,1$
$q_{14}$				$10^{-2} \cdot 0,8$
$q_{15}$				$10^{-4} \cdot 0,5$

und derjenigen des vorhergegangenen Schrittes zu entnehmen:

$$q_i = a_i/a_{i-1}.$$

In der Spalte des ersten Schrittes ist die Norm  $a_1$  selbst angegeben.

Man kann hieraus die dem Newtonschen Verfahren eigene quadratische Konvergenz entnehmen, sofern nur einmal sehr abseitig gelegene Näherungen, wie z. B. die der Fälle c) und d), etwas korrigiert waren. Gerade die beiden letzteren Fälle zeigen, wie unempfindlich das Verfahren gegenüber der Wahl der anfänglichen Näherungswerte ist. Zu den gleichen Feststellungen gelangt man auch bei so hohen Graden wie  $n = 12$  (siehe hierzu Anhang I), welchen immerhin eine vollständige Übertragungsfunktion nach Gl. (7) vom Grade 24 entspricht. Die numerischen Schwierigkeiten bei der Aufstellung einer Übertragungsfunktion solchen Grades auf Grund vorgegebener Dämpfungsforderungen selbst unter Zuhilfenahme elektronischer Rechanlagen sind bekannt.

4.3. Definition des Ausnutzungsfaktors

Mit der nach Gl. (9) gegebenen Definition des Grundgrads  $n$  beträgt die Gesamtphasendrehung eines Allpasses für  $0 \leq \omega \leq \infty$  bekanntlich

$$b_{\text{ges}} = n \cdot \pi. \tag{49}$$

Die von der Kurve einer Laufzeitfunktion als dem Differentialquotienten des Phasenmaßes und der positiven Frequenzachse eingeschlossene Fläche ist demnach ebenfalls genau gleich  $n \cdot \pi$ . Je größer also der über dem Approximationsintervall erscheinende Teil dieser innerhalb jeden Grades konstanten Fläche ist, um so wirkungsvoller wird der eben durch diesen Grad bedingte Aufwand an Schaltelementen ausgenutzt sein. Damit erscheint die De-

definition eines Ausnutzungsfaktors

$$\eta = \frac{\tau_0}{n\pi} (\omega_A - \omega_{-A}) \quad (50)$$

gerechtfertigt. Bei tiefpaßartigem Laufzeitverhalten wird im Fall der in der Arbeit gebrauchten Normierung der Klammerausdruck in der Gl. (50) zu eins.

Für den im Abschnitt 4.2 (Bild 10) angeführten Fall des Grundgrades  $n = 5$  mit  $\delta = 1,629$  und  $\tau_0 = 12$  erhält man

$$\eta = 12/5\pi = 76,4\%.$$

Zum Vergleich sei angeführt, daß ein Allpaß nach THOMSON für ebenfalls  $n = 5$  und  $\tau_0 = 12$  einen Ausnutzungsfaktor  $\eta = 50,1\%$  besitzt.

Andererseits verhilft die Einführung des Ausnutzungsfaktors zu einer weiteren Erkenntnis und aus diesem Grunde wurde er auch in den Katalog des Anhangs mit aufgenommen. Wie aus der Zusammenstellung der Ausnutzungsfaktoren für die katalogisierten Fälle (Bild 14 im Anhang III) hervorgeht, wächst der Ausnutzungsfaktor nicht nur mit der Verschlechterung der Approximationsgüte, d. h. der Vergrößerung der Schwankung  $\delta$ , sondern auch mit der Erhöhung des Grades bei konstant gehaltenem  $\delta$ . Wünscht man also eine vorgegebene Laufzeit zu approximieren, so ist es aufwandsmäßig stets günstiger, den geschlossenen Entwurf eines Allpasses hohen Grades als eine Zusammenschaltung mehrerer für niedrigeren Grad entworfener vorzusehen. Die technische Realisierung ist trotzdem immer durch Kettenschaltung einer entsprechenden Zahl von Elementar-Allpässen möglich, die einzeln abgeglichen werden können.

#### 4.4. Näherungsweise Vorausberechnung der approximierten Laufzeit

Die Ableitung des beschriebenen Approximationsverfahrens bedingte, daß man für den Entwurf eines Netzwerkes mit Tschebyscheffschem Laufzeitverhalten grundsätzlich von zwei Größen auszugehen hat: Von dem gewählten Grundgrad  $n$  und der gewählten Schwankung  $\delta$ . Wenngleich dies in vielen Fällen den technischen Realitäten entsprechen mag, so kann andererseits auch die zu approximierende Laufzeit  $\tau_0$  als die primär zu realisierende physikalische Größe auftreten. Einer solchen Forderung entspricht bei Filtern mit Tschebyscheffschem Dämpfungsverhalten (in Durchlaß- und Sperrbereich) diejenige, das Filter für eine vorgegebene Minstdämpfung im Sperrbereich exakt auszuliegen. Dieses aber ist bisher auch theoretisch erst dann möglich, wenn man die Parameter approximierender Übertragungsfunktionen bzw. charakteristischer Funktionen bereits errechnet hat. Praktisch stützt man sich daher auf Erfahrungswerte oder Kataloge.

Demgegenüber kommt man für tiefpaßartiges Tschebyscheffsches Laufzeitverhalten zu einem Zusammenhang zwischen dem Grad  $n$ , der Schwankung  $\delta$  und der approximierten Laufzeit  $\tau_0$ , der letztere bereits vor Ausführung der Approximation mit guter Näherung zu bestimmen gestattet.

Trägt man nämlich die approximierte Laufzeit  $\tau_0$  in Abhängigkeit von der Schwankung  $\delta$  jeweils in logarithmischem Maßstab auf (Bild 15, Anhang III), so ergibt sich — erwiesenermaßen nur scheinbar — eine Schar von Geraden, wobei der Grundgrad  $n$  den Scharparameter bildet. Wie im Anhang II näher ausgeführt, gelangt man durch diese Deutung zu der Näherung

$$\tau_0 \approx a_n \delta^{b_n}, \quad (51)$$

worin  $a_n$  und  $b_n$  zwei für jeden Grad charakteristische Größen darstellen. Da sich diese ein für alle Mal bestimmen lassen — sie sind für die betrachteten Grade  $n = 1, \dots, 10$  in den Anhang II mit aufgenommen —, ist man nunmehr in der Lage, bei Vorgabe des Grades  $n$  die zu jeder Schwankung  $\delta$  gehörige mittlere Laufzeit  $\tau_0$  mit einer für die praktische Realisierung in den meisten Fällen ausreichenden Genauigkeit zu bestimmen und umgekehrt.

#### 4.5. Ein Beispiel für den praktischen Entwurf

Als ein Beispiel für die Anwendung werde ein Allpaß höheren Grades mit bandpaßartigem Laufzeitverhalten entworfen.

Forderungen:

zu approximierende Laufzeit  $T = T_0 = 125 (1 \pm 0,01) \mu s$ ,

zulässige Schwankung  $\Delta T = \pm 1 \mu s$ ,

Frequenzbereich  $f_{-A} = 40 \text{ kHz}$  bis  $f_A = 62,5 \text{ kHz}$ ,

Abschlußwiderstand  $R_1 = R_2 = 600 \Omega$ .

Entwurf:

Nach Gl. (43) wird die Bezugsfrequenz

$$f_B = \sqrt{f_{-A} f_A} = \sqrt{40 \cdot 62,5} = 50 \text{ kHz}.$$

Als normierte Grenzen des Approximationsintervalls erhält man

$$\begin{aligned} \omega_{-A} &= \frac{f_{-A}}{f_B} = \frac{40}{50} = 0,8, & \omega_{-A} \omega_A &= 1,0, \\ \omega_A &= \frac{f_A}{f_B} = \frac{62,5}{50} = 1,25, \end{aligned}$$

Nach Gl. (5) wird die Bezugslaufzeit

$$T_B = \frac{1}{2\pi f_B} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^3} \text{ s}, \quad T_B = \frac{10}{\pi} \mu s.$$

Die normierte zu approximierende Laufzeit ist somit

$$\tau_0 = \frac{T_0}{T_B} = \frac{125 (1 \pm 0,01) \pi}{10} = 39,270 \pm 1\%.$$

Nimmt man als Erfahrungswert einen Ausnutzungsfaktor  $\eta \approx 55\%$  an, so erhält man mit Gl. (50) für den Grad

$$n \geq \frac{\tau_0}{\eta\pi} (\omega_A - \omega_{-A}), \quad n \geq \frac{12,5\pi}{0,55\pi} (1,25 - 0,8), \\ n \geq 10,2.$$

Die zugelassene normierte Schwankung ergibt sich zu

$$\delta \leq \frac{\Delta T}{T_B} = \frac{1 \cdot \pi}{10} = 0,314.$$

Die Approximation werde durchgeführt für

$$n = 10 \quad \text{und} \quad \delta = 0,25.$$

Zur Bestimmung der ersten Näherungen führen folgende Überlegungen: Mit  $n = 10$  gruppieren sich im II. Quadranten fünf Singularitäten im näheren Bereich des Approximationsintervalls etwa so, wie bei tiefpaßartigem Laufzeitverhalten für  $n = 5$  und für das Intervall  $-1 \leq \omega \leq +1$ . Daher werden die Lösungen für  $n = 5$  und  $\delta = 0,2$  aus dem Anhang III (mit drei Stellen) entnommen:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,1}'' &= -0,389, \\ \lambda_{2,3}'' &= -0,375 \pm j0,507, \\ \lambda_{4,5}'' &= -0,303 \pm j0,979.\end{aligned}$$

Mit dem Verhältnis der Approximationsintervalle wird eine Maßstabsänderung  $\kappa$  vorgenommen:

$$\kappa = (\omega_A - \omega_{-A})/2 = 0,225.$$

Mit  $\lambda'_\nu = \kappa \lambda''_\nu$  werden durch Rechenschieber-Rechnung

$$\begin{aligned}\lambda_{1,1}' &= -0,0875, \\ \lambda_{2,3}' &= -0,0845 \pm j0,114, \\ \lambda_{4,5}' &= -0,0682 \pm j0,22.\end{aligned}$$

Diese Zwischenwerte werden symmetrisch zum Punkt  $\lambda = j$  im II. Quadranten angeordnet und die zugehörigen konjugiert-komplexen Singularitäten des III. Quadranten dazugefügt. Mit  $\lambda_\nu = \lambda'_\nu + j$  erhält man die gerundeten Werte

$$\begin{aligned}\lambda_{1,1}^* &= -0,088 \pm j, \\ \lambda_{2,2}^* &= -0,085 \pm j1,114, \\ \lambda_{3,3}^* &= -0,085 \pm j0,886, \\ \lambda_{4,4}^* &= -0,068 \pm j1,22, \\ \lambda_{5,5}^* &= -0,068 \pm j0,78.\end{aligned}$$

Bei Vorgabe dieser Näherungswerte konvergierte das Approximationsverfahren für die Schranke  $|\Delta\lambda| < 10^{-10}$  nach acht Iterationsschritten. Die mittlere Laufzeit ist  $\tau_0 = 39,356$  mit  $\eta = 56,4\%$ ; die gestellten Forderungen können damit erfüllt werden. Für die Singularitäten erhält man als Lösungen

$$\begin{aligned}\lambda_{1,1}^* &= -0,114851468 \pm j1,025224774, \\ \lambda_{2,2}^* &= -0,109598995 \pm j1,146020455, \\ \lambda_{3,3}^* &= -0,109753066 \pm j0,904326415, \\ \lambda_{4,4}^* &= -0,084987609 \pm j1,259372919, \\ \lambda_{5,5}^* &= -0,085231480 \pm j0,790679159.\end{aligned}$$

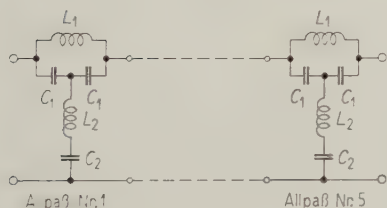


Bild 11.  
Schaltung des Allpasses zu dem Beispiel des Abschnittes 4.5 für den Grundgrad  $n = 10$ .

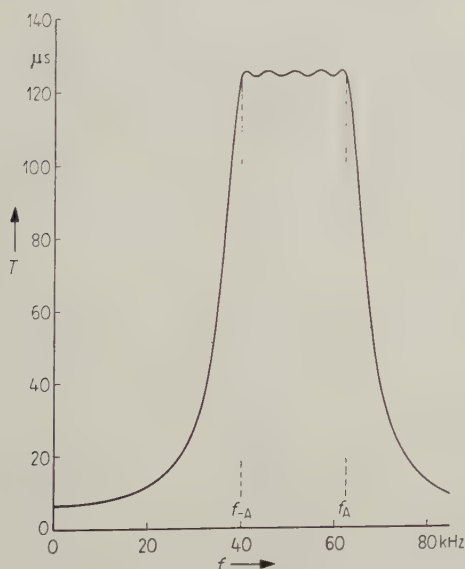


Bild 12. Laufzeitverlauf des Allpasses zu dem Beispiel des Abschnittes 4.5 für den Grundgrad  $n = 10$ .

Hieraus ergeben sich in bekannter Weise (siehe Abschnitt 1.5) die Größen der Schaltelemente für die fünf Elementar-Allpässe der in Bild 11 wiedergegebenen Schaltung:

Allpaß Nr.	1	2	3	4	5	
$C_1$	31,12	24,17	23,10	24,20	31,21	nF
$L_1$	1,030	1,010	0,824	0,632	0,408	mH
$C_2$	2,998	2,980	2,409	1,821	1,153	nF
$L_2$	5,602	4,350	4,157	4,357	5,618	mH

Der Laufzeitverlauf ist Bild 12 zu entnehmen.

### Zusammenfassung und Schlußwort

Während in der Netzwerktheorie verschiedene Verfahren zur Approximation Tschebyscheffschen Dämpfungsverhaltens bekannt und auch gebräuchlich sind, konnte die Tschebyscheffsche Approximation konstanter Gruppenlaufzeit bisher noch nicht gelöst werden. In der vorliegenden Arbeit wurde hierzu ein schlüssiges Verfahren angegeben, mit Hilfe dessen sich eine beliebig genaue strenge Lösung im Tschebyscheffschen Sinne erzielen läßt.

Der Aufgabenstellung entsprechend galt es, ein Verfahren zu finden, welches zur Synthese zweier rationaler Funktionenklassen einer Veränderlichen führt: Einerseits der Klasse der Laufzeitfunktionen und andererseits einer Klasse von Funktionen, welche die Tschebyscheffsche Ebnung beinhalten. Hierzu wurden nach Definition der notwendigsten Begriffe aus der Netzwerktheorie die Eigenschaften von Allpaß-Laufzeitfunktionen angegeben. Als zweite Funktionenklasse wurde die der Tschebyscheffschen rationalen Funktionen herangezogen, in welche nach BERNSTEIN notwendig alle Funktionen einzureihen sind, die eine Konstante in einem endlichen Intervall Tschebyscheffsch approximieren. Mit Hilfe einer konformen Abbildung gelang es, einen umkehrbar eindeutigen Zusammenhang zwischen bestimmten Tschebyscheffschen rationalen Funktionen in der Frequenzebene und einem jeweils zugeordneten reellen Hurwitzpolynom in der Bildenebene zu gewinnen. Auf Grund dieser vereinfachten Darstellungsweise führte nunmehr die Analyse des Approximationsproblems der Laufzeit zu der angestrebten Lösungsgleichung, welche den notwendigen und hinreichenden Bedingungen beider Funktionenklassen genügt. Der strenge Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung konnte nicht erbracht werden und es wäre eine reizvolle Aufgabe, hiernach zu suchen. Dessen ungeachtet sprechen starke Vermutungen und jedenfalls die praktischen Erfahrungen dafür, daß es stets eine eindeutige Lösung gibt.

Nach Behandlung der speziellen explizit lösbaren Fälle wurde das allgemeine Verfahren angegeben, welches über die Aufstellung eines linearen Gleichungssystems und dessen Lösung in iterativem Zyklus zum Ziel führt. Schließlich konnte der Geltungsbereich der Lösungsgleichung einerseits auf

das allgemeine endliche Approximationsintervall und andererseits auf Tiefpässe und Bandpässe erweitert werden.

Ein Überblick über zahlreiche praktisch ausgeführte und in Katalogform der Arbeit beigelegte Approximationen erlaubte Aussagen über die Konvergenz des Verfahrens, ermöglichte die Definition eines Ausnutzungsfaktors und führte zu einem mit hinreichender Genauigkeit gültigen Zusammenhang zwischen Grad, Laufzeit sowie Schwankung. Ein Anwendungsbeispiel für den praktischen Entwurf zeigte die Brauchbarkeit des Verfahrens auch für den Fall höheren Grades und bandpaßartigen Laufzeitverhaltens.

Die Einfachheit und Symmetrie des aus der Lösung hervorgehenden Gleichungssystems legen es nach Ansicht der Verfasser nahe, daß hier ein funktioneller Zusammenhang besteht, welcher auch im allgemeinen Fall eine explizite Lösung zulassen und damit gleichzeitig zum gesuchten Beweis für die Lösung führen könnte. Ob aber eine hierauf beruhende Berechnungsweise der in der Arbeit angegebenen vorzuziehen sein wird, erscheint zweifelhaft und vermag heute noch nicht entschieden zu werden.

### Anhang I

*Einzelheiten zur Approximation des Allpasses vom Grundgrad  $n = 12$  mit der Schwankung  $\delta = 0,01$*

Um Näherungen für die Singularitäten in  $\lambda$  zu bekommen, wurde von den Werten des Anhangs III für  $n = 10$  und  $\delta = 0,01$  ausgegangen. Der Erhöhung des Grades entsprechend wurden diese Singularitäten ohne weitere Rechnung in Richtung der imaginären Achse auseinandergerückt und ein zusätzliches Paar aufgenommen.

Mit diesen rohen und sehr willkürlich gewählten Näherungen konvergierte das Verfahren nach neun Schritten, wobei als Schranke die Forderung galt, daß die Korrekturen der Komponenten sämtlicher Singularitäten in  $z$  kleiner als  $10^{-10}$  sein müssen. Die beim letzten (neunten) Schritt tatsächlich vorgenommenen Korrekturen in  $z$  lagen mit

$$|Ax| \leq 0,6 \cdot 10^{-10}, \quad |Ay| \leq 0,2 \cdot 10^{-10}$$

noch innerhalb der Rechengenauigkeit der Rechenanlage und brachten eine effektive Verbesserung der Approximation. Als mittlere Laufzeit ergab sich  $\tau_0 = 25,565$  mit einem Ausnutzungsfaktor  $\eta = 67,8\%$ .

Der Tschebyscheffsche Verlauf und die Lage der Singularitäten in der  $\lambda$ -Ebene ist aus Bild 13 zu ersehen.

### Anhang II

*Ableitung der Näherungsformel für den Zusammenhang zwischen dem Grundgrad  $n$ , der Schwankung  $\delta$  und der approximierten Laufzeit  $\tau_0$*

Faßt man die Kurven des Bildes 15 als Geradenschar auf, so ist für jeden Grad der Ansatz

$$\lg \tau_0 = \lg a_n + b_n \lg \delta$$

erlaubt. Das Symbol  $\lg$  steht hier für einen Logarithmus beliebiger Basis. Durch Delogarithmieren erhält man die Näherungsformel

$$\tau_0 = a_n \delta^{b_n}.$$

Zur Bestimmung der für jeden Grad  $n$  eigentümlichen charakteristischen Größen  $a$  und  $b$  benötigt man jeweils zwei Wertepaare  $\tau_0$  und  $\delta$  ausgeführter Approximationen.

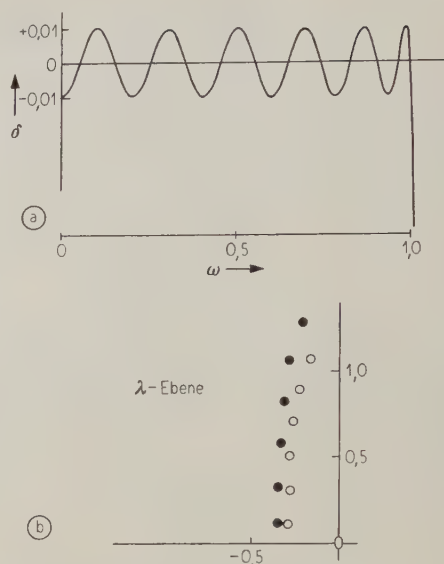


Bild 13. Zur Approximation des Falles  $n = 12$ ,  $\delta = 0,01$ ;  
(a) Feinstruktur der Schwankung  $\delta$ ,  
(b) Lage der Näherungen (•) und errechneten Singularitäten (○) im II. Quadranten.

Dann kann man schreiben

$$(I) \quad \tau_{01} = a_n \delta_1^{b_n}, \quad (II) \quad \tau_{02} = a_n \delta_2^{b_n}.$$

Durch Division von (II) durch (I) erhält man

$$\tau_{02}/\tau_{01} = (\delta_2/\delta_1)^{b_n}, \quad \lg(\tau_{02}/\tau_{01}) = b_n \lg(\delta_2/\delta_1),$$

$$(III) \quad b_n = \frac{\lg(\tau_{02}/\tau_{01})}{\lg(\delta_2/\delta_1)}.$$

Mit Einsetzen in (II) wird

$$(IV) \quad a_n = \tau_{02}/\delta_2^{b_n}.$$

Zur vereinfachten Berechnung für die am Schluß dieses Anhangs befindliche Aufstellung wurden der Logarithmus zur Basis 10 ( $\lg$ ) sowie die Schwankungen  $\delta_1 = 0,1$  und  $\delta_2 = 1,0$  benützt. Hiermit wird aus (IV)  $a_n = \tau_{02}$  und aus (III)  $b_n = \frac{\log(\tau_{02}/\tau_{01})}{\log(1,0/0,1)} = \log(\tau_{02}/\tau_{01})$ .

Ein Vergleich der hiermit näherungsweise berechneten Werte  $\tau_0$  für  $\delta = 0,01$  und  $n = 1, \dots, 10$  mit den durch die Approximation erhaltenen und in den Katalog aufgenommenen ergibt im ungenaueren Fall (Grad  $n = 1$ ) einen Fehler von 2%, während er bei den übrigen Graden unterhalb 0,3% bleibt.

*Aufstellung der charakteristischen Größen  $a$  und  $b$  für die Grade  $n = 1, \dots, 10$*

Grad $n$	$a$	$b$
1	1,931 142	0,331 572
2	3,980 930	0,195 370
3	6,326 960	0,140 686
4	8,832 008	0,110 564
5	11,439 960	0,091 3942
6	14,120 606	0,078 0901
7	16,855 557	0,068 3001
8	19,632 719	0,060 7845
9	22,443 694	0,054 8267
10	25,282 400	0,049 9834

Anhang III

Katalog der Allpässe mit tiefpaßartigem  
Tschebyscheffschem Laufzeitverhalten für die Grund-  
grade  $n = 1, \dots, 10$

Zur Abschätzung des benötigten Grades für den Entwurf eines Allpasses mit tiefpaßartigem Tschebyscheffschem Laufzeitverhalten dient Bild 15 bzw. die Näherung nach Gl. (51). Mit den so ermittelten Werten für den Grundgrad  $n$  und die (normierte) Schwankung  $\delta$  können den nachfolgenden Tabellen entnommen werden:

- die approximierte mittlere (normierte) Laufzeit  $\tau_0$ ,
- der Ausnutzungsfaktor  $\eta$  in Prozenten,
- die Nullstellen  $\lambda_\nu = \alpha_\nu + j\beta_\nu$  des Hurwitzpolynoms  $E_1(\lambda)$  nach Gl. (7).

Aus letzteren lassen sich die Schaltelemente der realisierenden Schaltung unmittelbar berechnen.

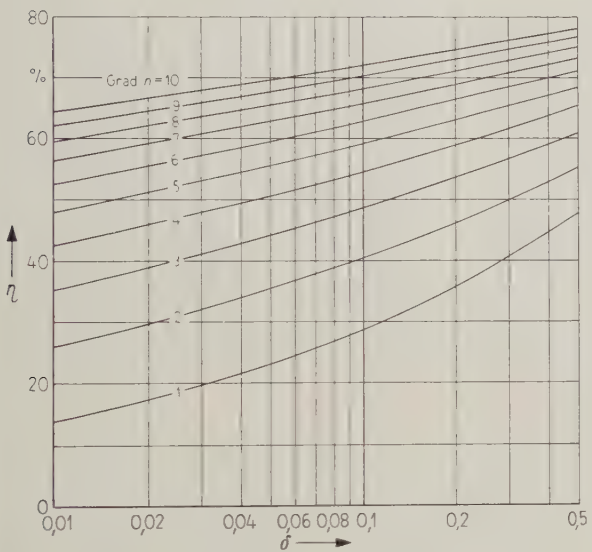


Bild 14. Ausnutzungsfaktor  $\eta$  in Abhängigkeit von der Schwankung  $\delta$ ; Parameter ist der Grad  $n$ .

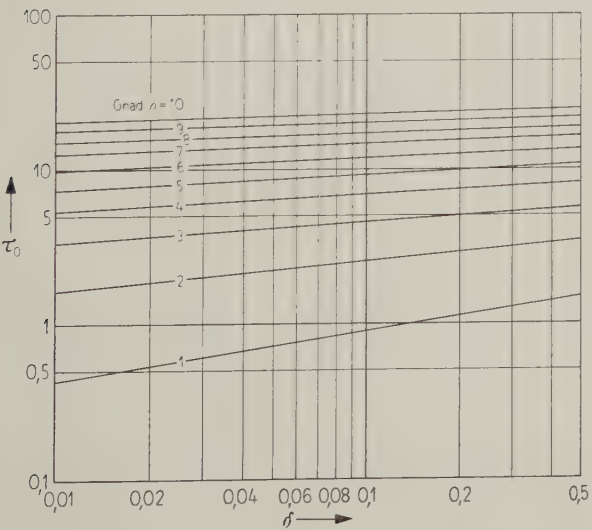


Bild 15. Tafel zur Aufwandsabschätzung für tiefpaßartiges Tschebyscheffsches Laufzeitverhalten.

Ist man darauf angewiesen, eine hier nicht angegebene Schwankung  $\delta$  zu benützen, so können die zum benachbarten und tabellierten Wert  $\delta$  gehörigen Singularitäten als gute Näherungen für das in der Arbeit beschriebene Verfahren verwendet werden. Für angenäherte Lösungen kann gegebenenfalls eine Interpolation mit Hilfe der tabellierten Werte genügen.

Sämtliche Zahlenwerte des Katalogs wurden durch Runden in der letzten angegebenen Stelle nach vorausgehender Berechnung mit einer Genauigkeit von (zumindest)  $10^{-7}$  erhalten. Damit kann erwartet werden, daß sie — in Ausnahmefällen bis auf eine Unsicherheit in der gerundeten Stelle um eine Einheit — exakt sind.

Grundgrad  $n = 1$

$\delta$	$\tau_0$	$\eta$ (%)	$-\alpha_1$
0,01	0,428	13,6	4,569 780
0,02	0,537	17,1	3,593 570
0,03	0,612	19,5	3,114 760
0,04	0,672	21,4	2,810 079
0,05	0,722	23,0	2,591 704
0,06	0,765	24,4	2,423 988
0,07	0,804	25,6	2,289 206
0,08	0,839	26,7	2,177 360
0,09	0,870	27,7	2,082 301
0,1	0,900	28,6	2,000 000
0,2	1,119	35,6	1,515 980
0,3	1,272	40,5	1,272 556
0,4	1,394	44,4	1,114 747
0,5	1,500	47,7	1,000 000

Grundgrad  $n = 2$

$\delta$	$\tau_0$	$\eta$ (%)	$-\alpha_{1,2}$	$\pm \beta_{1(2)}$
0,01	1,619	25,8	1,719 426	1,148 394
0,02	1,855	29,5	1,463 862	1,023 538
0,03	2,009	32,0	1,327 866	0,959 727
0,04	2,125	33,8	1,236 807	0,918 276
0,05	2,219	35,3	1,169 067	0,888 204
0,06	2,299	36,6	1,115 494	0,864 933
0,07	2,369	37,7	1,071 388	0,846 143
0,08	2,431	38,7	1,034 032	0,830 506
0,09	2,488	39,6	1,001 714	0,817 197
0,1	2,539	40,4	0,973 293	0,805 667
0,2	2,901	46,2	0,796 983	0,738 282
0,3	3,136	49,9	0,701 613	0,705 280
0,4	3,314	52,7	0,637 038	0,684 548
0,5	3,461	55,1	0,588 591	0,669 935

Grundgrad  $n = 3$

$\delta$	$\tau_0$	$\eta$ (%)	$-\alpha_1$	$-\alpha_{2,3}$	$\pm \beta_{2(3)}$
0,01	3,313	35,2	1,189 849	0,971 811	1,192 807
0,02	3,653	38,8	1,038 475	0,854 957	1,107 669
0,03	3,867	41,0	0,954 957	0,790 639	1,062 817
0,04	4,026	42,7	0,897 784	0,746 662	1,033 091
0,05	4,154	44,1	0,854 572	0,713 443	1,011 190
0,06	4,261	45,2	0,819 976	0,686 853	0,994 026
0,07	4,354	46,2	0,791 209	0,664 745	0,980 015
0,08	4,436	47,1	0,766 640	0,645 860	0,968 243
0,09	4,509	47,8	0,745 235	0,629 402	0,958 137
0,1	4,576	48,6	0,726 294	0,614 834	0,949 312
0,2	5,040	53,5	0,606 388	0,522 368	0,896 193
0,3	5,333	56,6	0,539 882	0,470 728	0,868 920
0,4	5,551	58,9	0,494 267	0,435 047	0,851 194
0,5	5,727	60,8	0,459 775	0,407 870	0,838 347

\* Siehe hierzu Fußnote 6.

Grundgrad  $n = 4$ 

$\delta$	$\tau_0$	$\eta$ (%)	$-\alpha_{1,2}$	$\pm \beta_{1(2)}$	$-\alpha_{3,4}$	$\pm \beta_{3(4)}$
0,01	5,318	42,3	0,853 679	0,397 227	0,656 397	1,171 164
0,02	5,739	45,7	0,756 312	0,378 437	0,588 183	1,110 755
0,03	6,000	47,7	0,701 666	0,368 359	0,549 937	1,078 342
0,04	6,193	49,3	0,663 868	0,361 589	0,523 482	1,056 599
0,05	6,346	50,5	0,635 087	0,356 544	0,503 328	1,040 431
0,06	6,474	51,5	0,611 910	0,352 550	0,487 088	1,027 662
0,07	6,585	52,4	0,592 547	0,349 261	0,473 509	1,017 172
0,08	6,682	53,2	0,575 945	0,346 473	0,461 855	1,008 307
0,09	6,768	53,9	0,561 430	0,344 060	0,451 656	1,000 657
0,1	6,847	54,5	0,548 547	0,341 938	0,442 596	0,993 948
0,2	7,387	58,8	0,466 127	0,328 763	0,384 327	0,952 858
0,3	7,723	61,5	0,419 747	0,321 626	0,351 183	0,931 197
0,4	7,971	63,4	0,387 648	0,316 787	0,328 012	0,916 855
0,5	8,169	65,0	0,363 213	0,313 153	0,310 207	0,906 306

Grundgrad  $n = 5$ 

$\delta$	$\tau_0$	$\eta$ (%)	$-\alpha_1$	$-\alpha_{2,3}$	$\pm \beta_{2(3)}$	$-\alpha_{4,5}$	$\pm \beta_{4(5)}$
0,01	7,528	47,9	0,691 440	0,652 828	0,586 607	0,488 504	1,147 715
0,02	8,015	51,0	0,616 598	0,584 569	0,565 446	0,443 006	1,102 108
0,03	8,314	52,9	0,574 224	0,545 848	0,553 915	0,417 191	1,077 333
0,04	8,532	54,3	0,544 769	0,518 887	0,546 086	0,399 200	1,060 576
0,05	8,706	55,4	0,522 263	0,498 257	0,540 204	0,385 419	1,048 037
0,06	8,851	56,3	0,504 093	0,481 580	0,535 516	0,374 265	1,038 084
0,07	8,975	57,1	0,488 883	0,467 603	0,531 633	0,364 905	1,029 872
0,08	9,084	57,8	0,475 819	0,455 586	0,528 325	0,356 847	1,022 906
0,09	9,181	58,4	0,464 382	0,445 054	0,525 451	0,349 776	1,016 874
0,1	9,269	59,0	0,454 219	0,435 686	0,522 912	0,343 478	1,011 568
0,2	9,869	62,8	0,388 956	0,375 293	0,506 926	0,302 630	0,978 706
0,3	10,239	65,2	0,352 062	0,340 935	0,498 087	0,279 114	0,961 086
0,4	10,510	66,9	0,326 465	0,316 986	0,492 016	0,262 546	0,949 283
0,5	10,727	68,3	0,306 946	0,298 655	0,487 411	0,249 742	0,940 522

Grundgrad  $n = 6$ 

$\delta$	$\tau_0$	$\eta$ (%)	$-\alpha_{1,2}$	$\pm \beta_{1(2)}$	$-\alpha_{3,4}$	$\pm \beta_{3(4)}$	$-\alpha_{5,6}$	$\pm \beta_{5(6)}$
0,01	9,882	52,4	0,568 554	0,234 444	0,523 887	0,693 616	0,386 097	1,128 599
0,02	10,422	55,3	0,510 119	0,227 812	0,472 893	0,673 496	0,353 124	1,092 474
0,03	10,752	57,0	0,476 837	0,224 125	0,443 742	0,662 406	0,334 257	1,072 671
0,04	10,993	58,3	0,453 616	0,221 588	0,423 346	0,654 819	0,321 038	1,059 198
0,05	11,183	59,3	0,435 828	0,219 660	0,407 683	0,649 087	0,310 873	1,049 071
0,06	11,341	60,2	0,421 437	0,218 111	0,394 984	0,644 498	0,302 619	1,041 003
0,07	11,477	60,9	0,409 370	0,216 816	0,384 316	0,640 681	0,295 675	1,034 325
0,08	11,595	61,5	0,398 991	0,215 707	0,375 125	0,637 420	0,289 684	1,028 646
0,09	11,701	62,1	0,389 894	0,214 737	0,367 054	0,634 577	0,284 416	1,023 716
0,1	11,797	62,6	0,381 801	0,213 875	0,359 865	0,632 061	0,279 717	1,019 370
0,2	12,446	66,0	0,329 625	0,208 343	0,313 240	0,616 067	0,249 046	0,992 240
0,3	12,843	68,1	0,299 969	0,205 198	0,286 490	0,607 111	0,231 236	0,977 522
0,4	13,134	69,7	0,279 320	0,202 999	0,267 741	0,600 910	0,218 622	0,967 583
0,5	13,365	70,9	0,263 532	0,201 310	0,253 329	0,596 178	0,208 833	0,960 159

Grundgrad  $n = 7$ 

$\delta$	$\tau_0$	$\eta$ (%)	$-\alpha_1$	$-\alpha_{2,3}$	$\pm \beta_{2(3)}$	$-\alpha_{4,5}$	$\pm \beta_{4(5)}$	$-\alpha_{6,7}$	$\pm \beta_{6(7)}$
0,01	12,341	56,1	0,490 144	0,478 738	0,386 733	0,435 468	0,760 875	0,317 813	1,113 506
0,02	12,927	58,8	0,441 209	0,431 829	0,377 574	0,395 554	0,742 475	0,292 533	1,083 849
0,03	13,283	60,4	0,413 255	0,404 981	0,372 428	0,372 602	0,732 246	0,277 977	1,067 480
0,04	13,542	61,6	0,393 719	0,386 193	0,368 861	0,356 482	0,725 210	0,267 737	1,056 292
0,05	13,746	62,5	0,378 737	0,371 767	0,366 138	0,344 068	0,719 872	0,259 839	1,047 855
0,06	13,916	63,3	0,366 605	0,360 076	0,363 940	0,333 981	0,715 584	0,253 412	1,041 115
0,07	14,061	63,9	0,356 425	0,350 259	0,362 098	0,325 491	0,712 009	0,247 993	1,035 522
0,08	14,188	64,5	0,347 665	0,341 804	0,360 514	0,318 164	0,708 947	0,243 311	1,030 756
0,09	14,301	65,0	0,339 982	0,334 384	0,359 126	0,311 721	0,706 273	0,239 187	1,026 613
0,1	14,403	65,5	0,333 144	0,327 777	0,357 891	0,305 975	0,703 901	0,235 504	1,022 953
0,2	15,093	68,6	0,288 998	0,285 025	0,349 900	0,268 533	0,688 730	0,211 353	0,999 975
0,3	15,514	70,5	0,263 856	0,260 599	0,345 310	0,246 909	0,680 161	0,197 240	0,987 399
0,4	15,821	71,9	0,246 329	0,243 535	0,342 083	0,231 686	0,674 195	0,187 202	0,978 858
0,5	16,064	73,0	0,232 916	0,230 454	0,339 593	0,219 946	0,669 625	0,179 390	0,972 448

Grundgrad  $n = 8$

$\delta$	$\tau_0$	$\eta(\%)$	$-\alpha_{1,2}$	$\pm\beta_{1(2)}$	$-\alpha_{3,4}$	$\pm\beta_{3(4)}$	$-\alpha_{5,6}$	$\pm\beta_{5(6)}$	$-\alpha_{7,8}$	$\pm\beta_{7(8)}$
0,01	14,880	59,2	0,426651	0,165505	0,411764	0,492384	0,371593	0,806367	0,269337	1,101495
0,02	15,505	61,7	0,385391	0,162115	0,373111	0,482344	0,339240	0,789681	0,249157	1,076480
0,03	15,884	63,2	0,361754	0,160185	0,350898	0,476660	0,320548	0,780345	0,237478	1,062597
0,04	16,159	64,3	0,345207	0,158835	0,335313	0,472700	0,307380	0,773897	0,229237	1,053076
0,05	16,375	65,2	0,332500	0,157798	0,323323	0,469666	0,297216	0,768989	0,222866	1,045875
0,06	16,555	65,9	0,322200	0,156957	0,313591	0,467210	0,288942	0,765038	0,217672	1,040111
0,07	16,708	66,5	0,313551	0,156250	0,305408	0,465148	0,281967	0,761736	0,213286	1,035320
0,08	16,842	67,0	0,306102	0,155639	0,298353	0,463371	0,275940	0,758904	0,209491	1,031230
0,09	16,961	67,5	0,299565	0,155102	0,292155	0,461811	0,270635	0,756426	0,206145	1,027669
0,1	17,069	67,9	0,293744	0,154624	0,286631	0,460422	0,265898	0,754226	0,203154	1,024520
0,2	17,795	70,8	0,256085	0,151498	0,250776	0,451382	0,234916	0,740088	0,183466	1,004659
0,3	18,236	72,6	0,234577	0,149682	0,230196	0,446157	0,216928	0,732052	0,171903	0,993716
0,4	18,557	73,8	0,219555	0,148397	0,215776	0,442467	0,204220	0,726435	0,163653	0,986249
0,5	18,811	74,8	0,208042	0,147401	0,204697	0,439613	0,194393	0,722119	0,157217	0,980627

Grundgrad  $n = 9$

$\delta$	$\tau_0$	$\eta(\%)$	$-\alpha_1$	$-\alpha_{2,3}$	$\pm\beta_{2(3)}$	$-\alpha_{4,5}$	$\pm\beta_{4(5)}$	$-\alpha_{6,7}$	$\pm\beta_{6(7)}$	$-\alpha_{8,9}$	$\pm\beta_{8(9)}$
0,01	17,483	61,8	0,380530	0,376101	0,287580	0,360434	0,569338	0,323529	0,838831	0,233292	1,091781
0,02	18,142	64,2	0,344477	0,340843	0,282323	0,327870	0,559144	0,296589	0,823686	0,216686	1,070232
0,03	18,541	65,6	0,323795	0,320591	0,279337	0,309091	0,553338	0,280963	0,815168	0,207037	1,058221
0,04	18,829	66,6	0,309304	0,306389	0,277241	0,295886	0,549279	0,269927	0,809266	0,200211	1,049959
0,05	19,056	67,4	0,298170	0,295469	0,275626	0,285710	0,546162	0,261393	0,804763	0,194924	1,043698
0,06	19,244	68,1	0,289141	0,286609	0,274312	0,277439	0,543632	0,254436	0,801131	0,190606	1,038677
0,07	19,405	68,6	0,281555	0,279162	0,273205	0,270476	0,541505	0,248564	0,798092	0,186957	1,034497
0,08	19,545	69,1	0,275021	0,272744	0,272249	0,264468	0,539670	0,243485	0,795481	0,183795	1,030925
0,09	19,670	69,6	0,269284	0,267108	0,271406	0,259185	0,538057	0,239009	0,793194	0,181006	1,027811
0,1	19,782	70,0	0,264175	0,262087	0,270654	0,254473	0,536618	0,235009	0,791161	0,178509	1,025055
0,2	20,539	72,6	0,231093	0,229533	0,265724	0,223802	0,527225	0,208770	0,778053	0,162032	1,007606
0,3	20,998	74,3	0,212174	0,210886	0,262847	0,206129	0,521770	0,193467	0,770567	0,152315	0,997941
0,4	21,331	75,4	0,198950	0,197836	0,260804	0,193713	0,517906	0,182626	0,765319	0,145365	0,991323
0,5	21,594	76,4	0,188808	0,187820	0,259217	0,184155	0,514911	0,174224	0,761278	0,139933	0,986326

Grundgrad  $n = 10$

$\delta$	$\tau_0$	$\eta(\%)$	$-\alpha_{1,2}$	$\pm\beta_{1(2)}$	$-\alpha_{3,4}$	$\pm\beta_{3(4)}$	$-\alpha_{5,6}$	$\pm\beta_{5(6)}$	$-\alpha_{7,8}$	$\pm\beta_{7(8)}$	$-\alpha_{9,10}$	$\pm\beta_{9(10)}$
0,01	20,137	64,1	0,341743	0,127523	0,335512	0,380641	0,320066	0,627539	0,286172	0,862967	0,205519	1,083791
0,02	20,827	66,3	0,310088	0,125425	0,304963	0,374456	0,292123	0,617524	0,263257	0,849163	0,191528	1,064916
0,03	21,243	67,6	0,291899	0,124213	0,287373	0,370891	0,275960	0,611794	0,249922	0,841367	0,183372	1,054356
0,04	21,543	68,6	0,279142	0,123357	0,275017	0,368381	0,264572	0,607778	0,240485	0,835951	0,177589	1,047076
0,05	21,780	69,3	0,269332	0,122696	0,265506	0,366442	0,255783	0,604686	0,233176	0,831811	0,173103	1,041550
0,06	21,975	69,9	0,261372	0,122157	0,257781	0,364863	0,248632	0,602174	0,227210	0,828467	0,169436	1,037111
0,07	22,142	70,5	0,254682	0,121702	0,251284	0,363531	0,242606	0,600059	0,222169	0,825665	0,166333	1,033411
0,08	22,288	70,9	0,248915	0,121308	0,245680	0,362378	0,237401	0,598232	0,217804	0,823256	0,163642	1,030247
0,09	22,417	71,4	0,243851	0,120960	0,240756	0,361362	0,232822	0,596625	0,213955	0,821143	0,161266	1,027485
0,1	22,534	71,7	0,239340	0,120649	0,236367	0,360454	0,228734	0,595190	0,210513	0,819264	0,159138	1,025039
0,2	23,319	74,2	0,210089	0,118605	0,207855	0,354486	0,202065	0,585799	0,187874	0,807113	0,145060	1,009506
0,3	23,793	75,7	0,193331	0,117405	0,191476	0,350990	0,186646	0,580324	0,174624	0,800147	0,136731	1,000864
0,4	24,137	76,8	0,181604	0,116552	0,179994	0,348502	0,175789	0,576438	0,165213	0,795253	0,130762	0,994930
0,5	24,409	77,7	0,172601	0,115887	0,171169	0,346567	0,167417	0,573421	0,157907	0,791478	0,126089	0,990439

Schrifttum

[1] BENNETT, B. J., Synthesis of electric filters with arbitrary phase characteristics. Inst. Radio Engrs. Conv. Rec. [1953], Teil 5, 19–26.

[2] BERNSTEIN, S., Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Verlag Gauthier-Villars, Paris 1926.

[3] BÜNEMANN, D., Der Laufzeitausgleich im Fernsehen nach einem graphisch-empirischen Verfahren. A.E.U. **10** [1956], 10–18.

[4] DARLINGTON, S., Network synthesis using Tchebyshev polynomial series. Bell Syst. tech. J. **31** [1952], 613–665.

[5] HELMAN, D., Synthesis of electrical filters and delay networks using Tchebyshev rational functions. Ph. D. Dissertation, Universität Michigan 1955.

[6] KUH, E. S., Synthesis of lumped parameters precision delay line. Inst. Radio Engrs. Nat. Conv. Rec. [1957], Teil 2, 160–174.

[7] MARTIN, H., Cellules passe-tout correctrices de phase calcul d'un égaliseur de temps de propagation pour transmission de télévision. Câbles et Transmission **10** [1956], 31–43.

[8] PILOTY, H., Kanonische Kettenschaltungen für Reaktanzvierpole mit vorgeschriebenen Betriebseigenschaften. Telegr. Fernspr. Tech. **29** [1940], 249–258, 279–290, 320–325.

[9] PILOTY, H., Lineare Schaltungen. Vorlesungen an der Technischen Hochschule München.

[10] SAAL, R. und ULBRICH, E., On the design of filters by synthesis. Transact. Inst. Radio Engrs. CT-5 [1958], 284–327.

[11] SHARPE, CH. B., A general Tchebycheff rational function. Proc. Inst. Radio Engrs. **42** [1954], 454–457.

[12] THOMSON, W. E., Delay networks having maximally flat frequency characteristics. Proc. Inst. Elect. Engrs. (III) **96** [1949], 487–490.

[13] ZEMANEK, H., Laufzeitketten. Öster. Z. Telegr., Teleph., Funk-u. Fernsehtech. **9** [1955], 29–43, 59–73, 91–102.

[14] ZURMÜHL, R., Matrizen. Springer-Verlag, Berlin 1950.

# Aktive Hochfrequenzspektrometer für ionosphärische Echolotung\*

## III. Bestimmung der wahren aus der scheinbaren Reflexionshöhe

Von ADOLF K. PAUL

Ionosphären-Institut Breisach im Fernmeldetechnischen Zentralamt der Deutschen Bundespost

(A. E. Ü. 14 [1960], 468—476; eingegangen am 26. August 1960)

DK 551.508.96

Im ersten Teil werden einige Vorschläge gemacht, wie die Meßgenauigkeit für die scheinbare Reflexionshöhe verbessert werden könnte.

Im zweiten Teil wird ein neues Verfahren zur Bestimmung der wahren Höhe beschrieben. Hierbei wird das Ionogramm längs einer  $f^2$ -Achse in gleichgroße Intervalle eingeteilt und  $h'$  an den Intervallgrenzen abgelesen. Es wird dabei angenommen, daß die erste Ableitung der (wahren) Höhe als Funktion der Elektronendichte in jedem Intervall eine lineare Funktion und an den Intervallgrenzen stetig ist.

Der dritte Teil befaßt sich mit der Anwendung dieses Verfahrens bei Nacht und bei Tag; es wird gezeigt, daß zur eindeutigen Berechnung wahrer Höhen beide Komponenten — ordentliche und außerordentliche — benutzt werden sollten.

In the first part some proposals are made as to improving the measuring accuracy of virtual heights.

The second part describes a new method for determining the real height. The ionogram is subdivided into equal intervals on a  $f^2$ -axis and  $h'$  is read at the interval junctions. It is supposed that the first derivative of the (real) height as a function of the electron density is a linear function in each interval and is continuous at the interval junctions.

The third part deals with the application of this method at night and in the day-time; it is shown that both magneto-ionic components should be used for a clear calculation of real heights.

### Einleitung

Beobachtet man die Ionosphäre mit der Impulsschallmethode, so wird bei einer gegebenen Frequenz die Laufzeit des Signals gemessen. Multipliziert man diese mit der halben Lichtgeschwindigkeit, so erhält man die scheinbare Höhe  $h'$ . Bekanntlich ist immer  $h' \geq h$ , wenn  $h$  die wirkliche Höhe ist. Tatsächlich benutzt man aktive Hochfrequenzspektrometer, man variiert also die Frequenz und erhält  $h'$  in Abhängigkeit der Frequenz  $f$ . Da zwischen der Elektronendichte  $N_e$  an der Reflexionsstelle und der Sendefrequenz eine bekannte einfache Beziehung besteht, hat man somit auch die scheinbare Höhe in Abhängigkeit der Elektronendichte. Gesucht wird nun der Verlauf der Elektronendichte mit der Höhe  $h$ .

### 1. Grundsätzliche Überlegungen

#### 1.1. Frequenzskala

Auf den meisten Beobachtungsstationen wird  $h'$  über einer logarithmischen, gelegentlich auch über einer linearen Frequenzskala registriert, eigenartigerweise aber nie über einer  $f^2$ -Skala, die für die ordentliche Komponente sofort die Elektronendichte angeben würde. Eine logarithmische Skala hat den Vorteil, daß Aussagen über die Elektronendichte mit der gleichen relativen Genauigkeit möglich sind, unabhängig von der Größe der Elektronendichte. Ferner tritt im Brechungsindex und ebenso

in dem Ausdruck für die Gruppengeschwindigkeit die Elektronendichte immer in dem Verhältnis  $f_N^2/f^2$  auf, d. h. der Verzögerungsbeitrag einer bestimmten Elektronendichte hängt von deren logarithmischem Abstand von der jeweiligen Meßfrequenz ab. Diese Tatsache wird bei manchen Verfahren [1]—[3] zur Bestimmung der wahren Höhe benutzt und deshalb die logarithmische Skala bevorzugt.

Die lineare Skala kann als Kompromiß zwischen der logarithmischen und der quadratischen Skala angesehen werden; sie ist von Vorteil, wenn die Matrixmethode [4] zur Bestimmung der wahren Höhen angewandt wird. Von der Physik der Ionosphäre her besteht streng genommen kein Grund linear in  $f$  zu registrieren.

Da in der Praxis bei sehr kleinen Elektronendichten weder o- noch x-Reflexionen zu erhalten sind, besteht, wie später noch im einzelnen gezeigt werden wird, eine der Hauptschwierigkeiten bei der Bestimmung der wahren Höhen darin, richtige Ausgangswerte für die weitere Rechnung zu finden. Die Bedingung scheinbare = wahre Höhe ( $h' = h$ ) ist mit einem gewissen Anspruch an Genauigkeit nur gegeben, wenn entweder der Gradient von  $N_e$  an der Unterkante der tiefsten Schicht sehr groß ist, so daß noch am Anfang des Meßbereichs die Spur waagrecht verläuft, was meistens nicht zutrifft, oder wenn Es auftritt und dessen Echospur bis zu großen Elektronendichten reicht; in diesem Fall kann die scheinbare Höhe am Ende des Echozuges der Elektronendichte als wahre Höhe zugeordnet werden, die  $f$  zur Plasmafrequenz hat. Eine

\* Die Arbeit wurde durch eine Forschungsbeihilfe des Bundesministeriums für Wirtschaft, Nr. A 190, ermöglicht.

direkte Information über die wahre Höhe bekommt man also aus dem Ionogramm nur, wenn die Spur über einen größeren Bereich waagrecht ist.

Oft wird nun als Anfangswert der Rechnung bei der niedrigsten Meßfrequenz scheinbare = wahre Höhe ( $h' = h$ ) gesetzt. Durch die Skalenverzerrung wird bei der logarithmischen Skala jeder  $h'$ -Verlauf immer um so flacher dargestellt, je niedriger die Frequenz ist. Statt einfach die scheinbare Höhe bei der Anfangsfrequenz als Ausgangswert zu nehmen, sollte man zumindest auf eine fiktive scheinbare Höhe bei der Elektronendichte Null extrapolieren, die dann als Ausgangswert für die weitere Rechnung zu genaueren Ergebnissen führen würde. Extrapolation nach der Elektronendichte Null bedeutet bei der logarithmischen Skala aber Extrapolation nach  $-\infty$  und stößt deshalb auf Schwierigkeiten.

Anders wäre es bei einer zu  $f^2$  proportionalen Skala. Wie später noch gezeigt wird, ist bei linearem Verlauf der Elektronendichte mit der Höhe in guter Näherung — zumindest bei höheren Frequenzen — die scheinbare Höhe der o-Komponente proportional  $f^2$ . Wenn also über einen größeren Bereich die Elektronendichte linear zunimmt, erhält man aus der Steigung von  $h'_o$  über  $f^2$  aufgetragen, bis auf einen gegebenen Faktor die Steigung von  $h$  über der Elektronendichte. Auch wenn der Anstieg nur näherungsweise linear ist, kann man auf diese Weise einen Ausgangswert für den weiteren Rechnungsgang gewinnen. Während in fast allen Ionogrammen ein linearer Verlauf der Elektronendichte über einen größeren Bereich als gute Näherung benutzt werden kann, trifft die Annahme der Matrixmethode, wonach die Höhe linear mit  $f_N$ , also mit  $\sqrt{N_e}$ , zunimmt, höchstens in sehr speziellen Fällen und für kleine Bereiche zu. Dies würde nämlich bedeuten, daß das Schichtprofil konkav gekrümmt wäre. Dies ist aber höchstens für sehr kleine Elektronendichten oder z. B. beim Übergang von  $F_1$  nach  $F_2$  zu erwarten, in jedem Fall trifft es nur für einen kleinen Bereich zu.

Bei einer Registrierung von  $h'$  über  $f^2$  nimmt die E-Region gegenüber der F-Region einen relativ kleinen Bereich ein. Dies entspricht aber genau dem Verhältnis der maximalen Elektronendichte der E-Region zu der der F-Region. Will man trotzdem die E-Region mit der gleichen relativen Genauigkeit beobachten wie die F-Region, so müßte man übrigens zur Registrierung der E-Region einen entsprechend größeren Maßstab auch in der Höhe wählen; anders ausgedrückt, wenn man eine logarithmische Frequenzskala fordert, so sollte man auch eine nichtlineare Höhenskala einführen. Die  $h'$ -Bereiche von E und F verhalten sich nämlich ähnlich wie die zugehörigen Frequenzbereiche.

Bei einer  $f^2$ -Skala würde man also zweckmäßigerweise mehrere Registriereinrichtungen verwenden. Man könnte z. B. auf der ersten Anlage bis etwa  $f = 5$  MHz bei einem relativ schnellen Filmvorschub und einem großen Höhenmaßstab registrieren. Man hätte damit auf jeden Fall den Übergang von E- zu F-Region erfaßt und könnte unter be-

stimmten Voraussetzungen  $h'_E$  genauer messen. Die zweite Anlage mit langsamerem Filmvorschub sollte zumindest die  $F_1$ -Region erfassen, besser noch bei nicht zu hoher  $f_{F_2}^0$  — wenigstens nachts — die gesamte F-Region, also  $f$  bis etwa 10 MHz. Die dritte Anlage müßte nur dann in Betrieb genommen werden, wenn  $f_{F_2}^0$ -Werte größer als 10 MHz zu erwarten sind. Bei  $h'$ -Ablesungen in gleichen Intervallen würde man bei einer  $f^2$ -Skala günstigere Höhenstaffelung gegenüber einer linearen Skala erreichen.

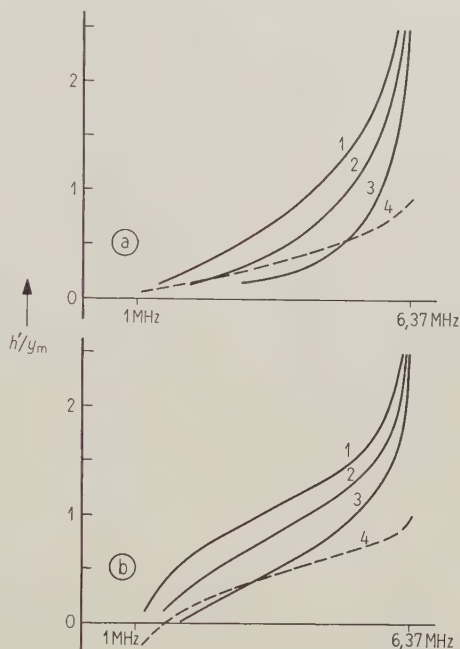


Bild 1. Scheinbare Höhen einer parabolischen Schicht (a) und einer EPSTEINschen Schicht (b),  $f_c = 6,37$  MHz; Kurven 1:  $h'$  über  $f^2$ -Skala, Kurven 2:  $h'$  über  $f$ -Skala, Kurven 3:  $h'$  über  $\log f$ -Skala, Kurven 4:  $h$  über  $f_N$ .

In Bild 1a,b sind  $h'$  und  $h$  für eine parabolische bzw. EPSTEINsche-Schicht je über einer logarithmischen, linearen und quadratischen Skala aufgetragen. Die quadratische Skala dürfte von den drei diskutierten Möglichkeiten die geeignetste sein für die Abschätzung wie für genaue Berechnungen.

## 1.2. Impulsbreite

Für eine möglichst genaue Berechnung des Elektronendichteverlaufs mit der Höhe muß man eine möglichst genaue Messung der scheinbaren Höhen voraussetzen. Im allgemeinen wird  $h'$  durch Ablesen an der Unterkante der Echospur der o- oder x-Komponente erhalten. Leider ist in der Praxis die Unterkante einer Echospur relativ schlecht definiert. Einmal hat aus verschiedenen Gründen das empfangene Echozeichen statt der idealen rechteckigen mehr dreieckige Form, und die Lage der effektiven Unterkante ist amplitudenabhängig. Es ist keine Seltenheit, daß in einem Ionogramm die stärksten Zeichen doppelt so breit wie die schwächsten erscheinen. Andererseits überlagern

sich oft o- und x-Komponente über große Teile des Ionogramms, und es hängt ganz vom Schichtverlauf ab, ob bei einer bestimmten Frequenz die Unterkante des Echozuges von der einen oder anderen Komponente stammt. Ferner ist gelegentlich der  $h'$ -Verlauf der normalen E-Schicht durch transparentes Es teilweise verdeckt. In allen diesen Fällen wird man die Unterkante nur abschätzen können; die entsprechende Unsicherheit ist umso größer, je schmaler die Bandbreite ist, d. h. bei normaler Dimensionierung, je breiter der Impuls gewählt ist. Andererseits kann die Impulsbreite nicht beliebig klein sein, auch wenn man zunächst vom größeren Störpegel absieht, der bei größerer Bandbreite zu erwarten ist. Weil mit einem Impuls ein gewisser Frequenzbereich abgestrahlt wird, entspricht das Echo einem gewissen Bereich der Elektronendichte und damit der Höhe. Dies führt zu einer Impulsverbreiterung, die von der jeweiligen Steilheit des Schichtverlaufs abhängt. Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß es eine optimale Impulsbreite speziell unter dem Gesichtspunkt,  $h'$  möglichst genau bestimmen zu können, geben wird.

Bezeichnet man die Impulsdauer mit  $\tau$ , so ist die „Höhenbreite“ des Sendeimpulses  $\Delta h = \tau c/2$  und die „Frequenzbreite“ (aus der sich die minimale Bandbreite des Empfängers ergibt)  $\Delta f = 1/\tau$ . (Hieraus folgt  $\Delta h \Delta f = c/2 = \text{const.}$ ) Wir definieren wie in der Optik mit  $h'/\Delta h$  ein Auflösungsvermögen bezüglich der Höhe und mit  $f^2/\Delta f^2$  ein solches bezüglich der Elektronendichte; ersteres ist maßgebend z. B. für die Trennung der beiden Komponenten, letzteres z. B. für die Selektion gegen störende Sender. Bei der üblichen Dimensionierung ist die Frequenzauflösung besser als die Höhenauflösung. Verlangt man jedoch gleich große Höhenauflösung, so erhält man die Bedingung

$$\frac{h'}{(c/2)\tau} = \frac{f}{2/\tau} \quad \text{oder} \quad \tau^2 = \frac{4h'}{cf}.$$

Für  $h'/f$ -Werte, wie sie im allgemeinen vorkommen, erhält man  $\tau = 20$  bis  $30 \mu\text{s}$ . Allerdings ist die Verbreiterung des Impulses im Empfänger, die der endlichen Bandbreite entspricht, in dieser rohen Überlegung nicht berücksichtigt.

Eine andere Überlegung führt zu einem ähnlichen Resultat. Die Impulsverbreiterung infolge der Variation von  $h'$  innerhalb  $\Delta f$  sollte jedenfalls möglichst klein gehalten werden. Wie später noch gezeigt wird, gilt in erster Näherung

$$h'(f_2) - h'(f_1) \approx (f_2^2 - f_1^2) \frac{dz}{df_N^2} \cdot 2,0 \approx 4f\Delta f \frac{dz}{df_N^2}.$$

Ist  $f_2 - f_1 = \Delta f$  die Frequenzbreite des Impulses, so ist die gesamte Impulsbreite (allerdings ohne Berücksichtigung der Verbreiterung im Empfänger)

$$\Delta h' = \frac{c}{2} \tau + 4f \frac{1}{\tau} \frac{dz}{df_N^2}.$$

Die Minimalbedingung verlangt

$$\tau^2 = \frac{8f}{c} \frac{dz}{df_N^2}.$$

Unter der Annahme, daß  $h'$  bis  $f/f_c = 0,98$  meßbar ist und dort die Schicht parabolischen Verlauf hat, wird

$$\frac{dz}{df_N^2} \approx 2,5 \frac{y_m}{f_c^2}$$

und damit

$$\tau = \sqrt{20 \frac{y_m}{cf_c}}.$$

Für die E-Schicht ( $y_m = 20 \text{ km}$ ,  $f_c = 3 \text{ MHz}$ ) erhält man  $\tau = 21 \mu\text{s}$ , für die  $F_2$ -Schicht ( $y_m = 100 \text{ km}$ ,  $f_c = 8 \text{ MHz}$ )  $\tau = 29 \mu\text{s}$ , also wesentlich kleinere Werte als allgemein üblich.

Übrigens ist bei photographischer Registrierung das Auflösungsvermögen bezüglich der Frequenz meist nicht durch die Bandbreite des Empfängers, sondern durch die Strichbreite auf dem Schirm der Oszillographenröhre bestimmt. Bei einer Strichbreite von  $0,5 \text{ mm}$  auf dem Schirm entsteht nach Abbildung im Verhältnis  $5:1$  auf dem Film eine Strichbreite von  $0,1 \text{ mm}$ . Bei linearer Frequenzskala und einer Bandbreite von  $20 \text{ kHz}$  sollte dann der Frequenzbereich von  $1$  bis  $20 \text{ MHz}$  auf  $85 \text{ mm}$  Filmlänge abgebildet werden. Bei gleicher Bandbreite und logarithmischer Skala wären für denselben Frequenzbereich bei voller Ausnutzung der Strichbreite bis zum Ende  $300 \text{ mm}$  Filmlänge erforderlich. Beim normalen Filmvorschub von  $56 \text{ mm}$  könnte man also die Impulsdauer von  $100 \mu\text{s}$  auf ein Drittel reduzieren, erhielte bei der dreifachen Bandbreite die gleiche Frequenzauflösung auf dem Film und hätte eine dreimal bessere Höhenauflösung.

Man wird einwenden, daß bei größerer Bandbreite des Empfängers der Störpegel zunimmt. Bei den heute verwendeten Radar-Impulsröhren könnte man jedoch die Impulsleistung im gleichen Verhältnis erhöhen, in dem die Impulsdauer verkleinert wird. Eine praktische Grenze für die Erhöhung der Bandbreite ist allerdings durch die Senderbelegung gegeben. Deshalb wird die zweckmäßige Wahl der Bandbreite von den regionalen Bedingungen in den verschiedenen Frequenzbändern abhängig sein.

## 2. Mathematische Grundlagen

Mit der Gruppengeschwindigkeit  $u$  schreibt man für die scheinbare Höhe

$$h'(f^2) = h_0 + \int_0^z \frac{c}{u} dz, \quad \frac{c}{u} = \mu' = \frac{d}{df} (f\mu) \quad (1)$$

( $\mu$  Brechungsindex,  $\mu'$  Gruppen-Ausbreitungsindex).

Wenn die Elektronendichte mit der Höhe monoton zunimmt, kann man umformen:

$$h'(f^2) = h_0 + \int_0^{f^2} \frac{c}{u} \frac{dz}{df_N^2} df_N^2 \quad (2)$$

oder mit  $X = f_N^2/f^2$ :

$$h'(f^2) = h_0 + \int_0^1 \frac{c}{u} \frac{dz}{dX} dX. \quad (3)$$

Führen wir  $t = \sqrt{1 - X}$  ein, so erhalten wir

$$h'(f^2) = h_0 - 2 \int_1^0 \frac{c}{u} \frac{dz}{dX} t dt = h_0 + 2 \int_0^1 \frac{dz}{dX} G(t) dt. \quad (4)$$

Während  $c/u$  an der Reflexionsstelle unendlich wird, bleibt  $G(t) = tc/u$  im ganzen Integrationsbereich endlich.

bleibt man weiter bei der Voraussetzung, daß die Elektronendichte eine monotone Funktion der Höhe ist, so kann man mit

$$2 \int_t^1 G(t) dt = g[t(X)] = g(X)$$

eine weitere Umformung vornehmen und erhält

$$h' = h_0 + \int_0^{g(1)} \frac{dz}{dX} dg = h_0 + f^2 \int_0^{g(f^2)} \frac{dz}{df_N^2} dg. \quad (5)$$

Weiter sei durch

$$\begin{aligned} h' &= h_0 + f^2 \int_0^1 \frac{dz}{df_N^2} dX + f^2 \int_0^{g(f^2)-1} \frac{dz}{df_N^2} d(g - X) = \\ &= h_0 + z + f^2 \int_0^{\gamma(1)} \frac{dz}{df_N^2} d\gamma \end{aligned} \quad (6)$$

die Funktion  $\gamma(f_N^2/f^2)$  und die Verzögerung

$$V = h' - (h_0 + z) = f^2 \int_0^{\gamma(1)} \frac{dz}{df_N^2} d\gamma \quad (7)$$

(als Differenz zwischen scheinbarer und wahrer Höhe) definiert. Nach Gl. (6) hat man zur Bestimmung von  $V$  die Ableitungen  $dz/df_N^2 = z'$  über  $\gamma(X)$  aufzutragen und zu integrieren. (In Bild 2 sind für verschiedene Frequenzen zur  $\gamma$ -Skala die zugehörige  $X$ - und  $f_N/f$ -Skala aufgetragen. Man sieht, daß die Verzögerung in der Hauptsache durch  $z'$  im Bereich  $1 - X \ll 1$  bestimmt wird.) Ist  $V$  dann bekannt, so erhält man dann aus  $h' - V = h$  die wahre Höhe.

Um  $z'$  zu erhalten kann man folgendermaßen vorgehen: Nach Gl. (5) ist

$$h' = h_0 + f^2 \int_0^{g(f^2)} \frac{dz}{df_N^2} dg = h_0 + f^2 \int_0^{f^2} \frac{dz}{df_N^2} \frac{dg}{df_N^2} df_N^2.$$

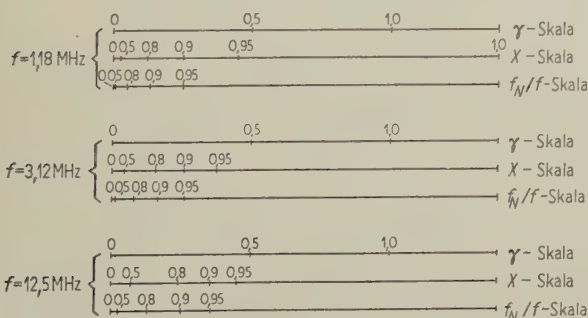


Bild 2. Vergleich von  $\gamma$ -Skala,  $X$ -Skala und  $f_N/f$ -Skala für verschiedene Frequenzen.

Durch partielle Integration erhält man hieraus

$$h' = h_0 + f^2 [z' \cdot g]_0^{f^2} - f^2 \int_0^{f^2} z'' g df_N^2, \quad (8)$$

$$z' = \frac{dz}{df_N^2}, \quad z'' = \frac{d^2z}{d(f_N^2)^2}.$$

Da  $h_0$  unbekannt ist, wird es zweckmäßig sein, zu Differenzen überzugehen. (Da  $g$  auch noch von  $f$  abhängt, sei weiterhin  $g = g(f_N^2, f^2)$  geschrieben.)

$$\begin{aligned} h'(f_2^2) - h'(f_1^2) &= f_2^2 z'(f_2^2) g(f_2^2, f_2^2) - f_1^2 z'(f_1^2) g(f_1^2, f_1^2) - \\ &- \int_0^{f_2^2} z'' f_2^2 g(f_N^2, f_2^2) df_N^2 + \int_0^{f_1^2} z'' f_1^2 g(f_N^2, f_1^2) df_N^2. \end{aligned}$$

Durch Umformen erhält man

$$\begin{aligned} \Delta h' &= z'(f_1^2) [f_2^2 g(f_2^2, f_2^2) - f_1^2 g(f_1^2, f_1^2)] + \\ &+ \int_0^{f_2^2} z'' k(f_N^2; f_2^2, f_1^2) df_N^2 \end{aligned} \quad (9)$$

mit

$$k(f_N^2; f_2^2, f_1^2) = \begin{cases} f_1^2 g(f_N^2, f_1^2) - f_2^2 g(f_N^2, f_2^2) & \text{für } 0 \leq f_N^2 \leq f_1^2, \\ f_2^2 g(f_N^2, f_2^2) - f_2^2 g(f_N^2, f_1^2) & \text{für } f_1^2 \leq f_N^2 \leq f_2^2. \end{cases}$$

In Bild 3 ist  $k(f_N^2; f_2^2, f_1^2)$  in Abhängigkeit von  $f_N^2/f_1^2$  ( $f = 3,2$  MHz) aufgetragen.

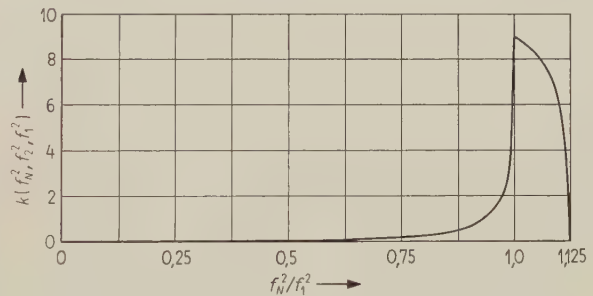


Bild 3. Funktion  $k(f_N^2; f_2^2, f_1^2)$  für die Frequenzen  $f_2 = 2,83$  MHz und  $f_1 = 3,0$  MHz.

Bisher war die einzige Voraussetzung, daß die Elektronendichte monoton mit der Höhe zunimmt. Wir nehmen nun weiter an, daß  $h'$  an den Stellen  $f_v^2 = v \Delta f^2$ , soweit sie im Meßbereich liegen, gemessen wurde und unterteilen das Integral in Gl. (9) in die zugehörigen Intervalle in  $f_N^2$ , also

$$\begin{aligned} h'(f_m^2) - h'(f_{m-1}^2) &= \\ &= z'(f_{m-1}^2) [f_m^2 g(f_m^2, f_m^2) - f_{m-1}^2 g(f_{m-1}^2, f_{m-1}^2)] + \\ &+ \sum_{v=1}^m \int_{f_{v-1}^2}^{f_v^2} z'' k df_N^2. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß  $z''$  abschnittsweise konstant und  $z'$  überall stetig ist, erhält man mit

$$z''_v = \frac{z'_v - z'_{v-1}}{\Delta f^2};$$

$$h'_m - h'_{m-1} = z'_{m-1} \Delta_m(f^2 g) + \sum_{v=1}^m \bar{k}_{m,v} (z'_v - z'_{v-1})$$

$$\text{mit } \bar{k}_{m,v} = \frac{1}{\Delta f^2} \int_{f_{v-1}^2}^{f_v^2} k(f_N^2; f_m^2, f_{m-1}^2) df_N^2$$

$$\text{und } \Delta_m(f^2 g) = f_m^2 g(f_m^2, f_m^2) - f_{m-1}^2 g(f_{m-1}^2, f_{m-1}^2).$$

Daraus folgt

$$z'_m = r_m \Delta h'_m + \sum_{v=1}^{m-1} r_{m,v} z'_v \quad (10)$$

mit

$$r_m = \frac{1}{\bar{k}_{m,m}},$$

$$r_{m,m-1} = \frac{1}{\bar{k}_{m,m}} [\bar{k}_{m,m} - \bar{k}_{m,m-1} - \Delta_m(f^2 g)],$$

$$r_{m,v} = \frac{1}{\bar{k}_{m,m}} (\bar{k}_{m,v} - \bar{k}_{m,v-1}) \quad (v = 1, 2, \dots, m-2).$$

Man hat hiermit eine Rekursionsformel für  $z'$ , in die  $\Delta h'$  und die schon bekannten  $z'$  eingehen. Die Zahl der Koeffizienten nimmt zwar mit jedem weiteren Intervall um eine Einheit zu, andererseits nehmen die Koeffizienten aber für ein festes  $m$  mit abnehmendem  $v$  sehr rasch ab, so daß man in der Praxis mit wenigen Koeffizienten ausreichende Genauigkeit erzielt. Die Koeffizienten ändern sich nur wenig mit der Frequenz, was für die Praxis eine wesentliche Vereinfachung ergibt.

### 3. Höhenentzerrung einfacher Ionogramme (Nacht)

Nachts ist im allgemeinen der Echozug der o-Komponente im erfaßbaren Frequenzbereich durchweg stetig,  $h'$  wächst monoton mit der Frequenz. (Ionogramme mit abdeckendem Es seien vorerst ausgeschlossen.) Eine Hauptschwierigkeit bei der Entzerrung liegt immer darin, daß weder die o- noch die x-Komponente bis zu genügend niedrigen Frequenzen beobachtbar sind, so daß erst von einer weit über Null liegenden Elektronendichte ab scheinbare Höhen gemessen werden. Jedes Verfahren, das nur die in einer Komponente enthaltene Information benutzt, ist also auf Annahme für den Bereich  $0 \leq f_N^2 \leq f_{\min}^2$  angewiesen. ( $f_{\min}^2$  soll die niedrigste Elektronendichte bezeichnen, bei welcher der entsprechende Echozug im Ionogramm beginnt.)

Wie verschieden das Ergebnis ausfallen kann, je nach den Annahmen für den Anfangsbereich, soll folgendes Beispiel zeigen<sup>1</sup>. In Bild 4 wurde eine EPSTEINSche Schicht mit 100 km Halbdicke, einer kritischen Frequenz  $f_c = 3,18$  MHz bei einem Schichtmaximum in 300 km Höhe angenommen (unterste, ausgezogene Kurve). Zunächst wurde  $h$  nach der Matrixmethode berechnet und wie üblich angenommen, daß  $h_0 = h'_0$ . Das Ergebnis ist in der obersten Punktreihe (●) dargestellt. Die mittlere Punktreihe (■) wurde mit dem oben angegebenen Verfahren erhalten unter der Annahme, daß  $d^2z/d(f_N^2)^2 = \text{const}$  im Bereich  $0 \leq f_N^2 \leq 3,0$  MHz<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Zur Erprobung des Verfahrens an Modellrechnungen wurden die von W. BECKER [5], [6] veröffentlichten Tabellen mit den Daten für die Station Lindau/Harz benutzt.

und daß die Echospur ab 1 MHz bekannt sei. Das Ergebnis ist keineswegs befriedigend, was darauf zurückzuführen ist, daß die gemachte Annahme dem Modell nicht entspricht.

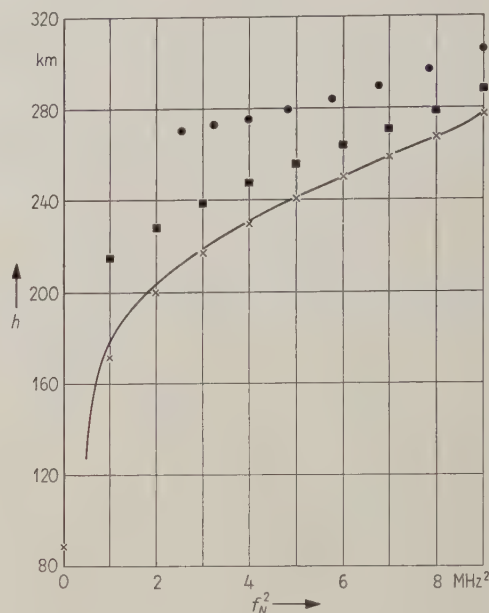


Bild 4. Modellrechnung einer EPSTEINSchen Schicht nach verschiedenen Verfahren,  $f_c = 3,18$  MHz,  $y_m = 100$  km,  $h(f_c) = 300$  km;

- Matrixmethode, Rastersprung 0,2 MHz,
- Differenzenverfahren, Annahme:  $z'' = \text{const}$  in  $0 \leq f_N^2 \leq 3,0$  MHz<sup>2</sup>,
- × Differenzenverfahren, angewandt auf o- und x-Komponente,
- angenommenes Modell.

Nach dem obigen Verfahren erhält man für bestimmte Werte von  $f_N^2$  Höhenwerte. Verbindet man diese nach den im Verfahren gemachten Voraussetzungen (Konstanz von  $z''$  im Intervall, Stetigkeit von  $z'$ ), so erhält man ein Profil mit überall stetigen Tangenten. Berechnet man hierzu wieder nach einer genauen Methode den  $h'$ -Verlauf, so stimmt dieser an den Ablesestellen mit den gemessenen Werten von  $h'$  überein und zeigt ebenfalls stetige Tangenten im ganzen Verlauf. Die Lösung ist also selbstkonsistent, bei der angegebenen Kontrolle kann keine Diskrepanz festgestellt werden. Soweit nur eine Komponente benutzt wird, läßt sich überhaupt nicht feststellen, ob das errechnete Profil der Wirklichkeit entspricht.

Richtiger ist das Problem so zu stellen: Mit  $h'$ -Werten oberhalb von  $f_{\min}^2$  sollen sowohl der Schichtverlauf für  $0 \leq f_N^2 \leq f_{\min}^2$  als auch der Verlauf für  $f_N^2 > f_{\min}^2$  bestimmt werden. Dies ist nur möglich, wenn man mindestens zwei linear unabhängige Funktionen des Schichtverlaufs kennt. Die eindeutige Berechnung der wahren Höhen ist also überhaupt nur möglich auf Grund der Tatsache, daß die Ionosphäre doppelbrechend ist.

In Bild 5 sind  $\gamma_o(X)$  und  $\gamma_x(X_R)$  aufgetragen ( $X_R = f_N^2/(f^2 - f_H^2)$ ). Man erkennt, daß die beiden Funktionen wesentlich verschieden sind, daß also

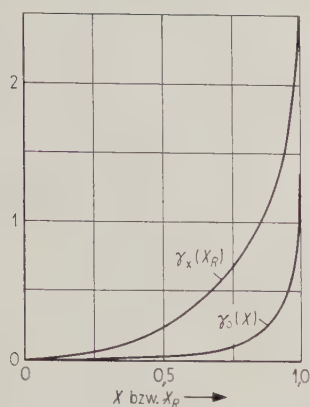


Bild 5. Vergleich der Verzögerungsfunktionen für die o- und die x-Komponente.

der Schichtverlauf in  $h'_o$  anders eingeht als in  $h'_x$ . Für die praktische Anwendung kann man für  $h'_x$  genau dieselben Umformungen wie bei  $h'_o$  durchführen und erhält die entsprechenden Gleichungen.

$$z'_m = x'_m \cdot \Delta x h'_m + \sum_{v=1}^{m-1} x'_{m,v} \cdot z'_v. \quad (11)$$

$x'_v$  ist jetzt natürlich abzulesen bei den Frequenzen, die durch die Gleichungen

$$f_{Nv}^2 = f_v^2 - f_H^2$$

bestimmt sind, und die  $f_N^2$ , die durch die Ablesefrequenzen bei der o-Komponente gegeben sind. Man erhält für jedes  $\Delta f_N^2$  zwei Gleichungen und kann also indirekt die am Anfangsbereich fehlenden  $h'$ -Werte der o-Komponente durch die gleiche Anzahl von Ablesungen an der x-Komponente ersetzen; dabei wird nicht verlangt, daß  $h'_x$  schon von  $f_H$  ab bekannt ist. Für das in Bild 4 gezeigte Modell wurde angenommen, daß o- und x-Komponente von  $f_N^2 = 1 \text{ MHz}^2$  ab, also von den Frequenzen 1,0 MHz bzw. 1,75 MHz ab, bekannt seien. An der x-Komponente wurde abgelesen bei  $f_N^2 = 1, 2, 3 \text{ MHz}^2$ , an der o-Komponente bei  $f_N^2 = 1, 2, \dots, 9 \text{ MHz}^2$ , jeweils auf 0,5 km genau. Aus den zu den beiden ersten Intervallen gehörenden vier Gleichungen für die beiden Komponenten wurden zunächst  $z'_0, z'_1, z'_2$  und  $z'_3$  berechnet, dann mit der Rekursionsformel für die o-Komponente die übrigen  $z'_n$ . Das hierbei erhaltene Resultat ist ebenfalls in Bild 4 eingetragen, die Punkte fallen praktisch auf das Modellprofil.

Man wird im allgemeinen bestrebt sein, die Elektronendichte-Verteilung soweit zu berechnen, wie dies möglich ist, d. h. bis zur höchsten scheinbaren Höhe, die auf dem Ionogramm erkennbar ist. Da die oben angegebenen Koeffizienten nur wenig von der Frequenz abhängen, kann man die Ablesefrequenz ohne weiteres so viel verschieben, daß eine Ablesung auf diesen Punkt fällt. Man wird zweckmäßigerweise also bei vorgegebenen Frequenzen mit der Ablesung von  $h'$  und Berechnung der  $z'$ -Werte beginnen und die Verschiebung in einem Be-

reich vornehmen, in dem sich  $z'$  wenig ändert; solche Gebiete sind fast in jedem normalen Schichtverlauf vorhanden. Sollte dies nicht der Fall sein, so muß  $z'$  auf die verschobenen Frequenzen interpoliert werden. Man hat dann bei der Integration über  $z'$  darauf zu achten, daß ein Intervall kürzer oder länger ist.

#### 4. Höhenentzerrung komplizierter Ionogramme (Tag)

##### 4.1. Die Diskontinuität bei $f_E^o$

Am Tage zeigt das Ionogramm zumindest eine Unstetigkeitsstelle bei der kritischen Frequenz der E-Schicht,  $f_E^o$ .  $h'$  wird dort sehr groß und ist wegen der sehr hohen Absorption in der Umgebung von  $f_E^o$  nicht meßbar. Der Echozug setzt oberhalb von  $f_E^o$  wieder ein, zunächst mit einem sehr steilen Abfall in  $h'$ , um denn wieder in einen mehr oder weniger steil verlaufenden Anstieg überzugehen. Zwischen  $h_{E'}^{\min}$  und  $h_F^{\min}$  besteht im allgemeinen eine Höhendifferenz von der Größenordnung 100 km. Die „Unendlichkeitsstelle“ im Ionogramm sagt nur aus, daß dort  $z'$  unendlich groß ist. (BIBL [7] hat gezeigt, daß man aus der Differenz der scheinbaren Höhen auf einen Höhengsprung in  $h$  schließen kann, wenn man die in der Echoamplitude enthaltene Information berücksichtigt.) Rein geometrisch ließe sich, auch wenn man das steile Herunterkommen von  $h'$  oberhalb  $f_E^o$  in Betracht zieht, der Verlauf des Echozuges durch einen stetigen, wenn auch sehr steilen Anstieg von  $h$  mit der Elektronendichte erklären. Andererseits muß die Höhe der F-Schicht bei  $f_E^o$  kleiner sein als  $h_F^{\min}$ . Wir erhalten also den minimalen Höhenverlauf oberhalb von  $f_E^o$ , wenn wir einen Wendepunkt mit senkrechter Tangente bei  $f_E^o$  annehmen, den maximalen Höhenverlauf, wenn wir bei  $f_E^o$  für die Unterkante der F-Schicht  $z' = 0$  ansetzen. Dazwischen liegen beliebig viele Lösungsmöglichkeiten, je nachdem welche Annahmen entweder direkt gemacht werden oder indirekt im Verfahren stecken. Daß auch eine exakte Lösung der Integralgleichung, wenn sie bekannt wäre, nicht weiter helfen kann, erkennt man an folgendem Beispiel: Nehmen wir an, E- und F-Schicht seien zwei getrennte Parabeln mit jeweils bestimmter Halbdicke und kritischer Frequenz. Der Echozug einer Komponente sei vollständig gegeben. Ersetzt man die E-Parabel durch eine halbe Parabel mit doppelter Halbdicke, so wird der Echozug der F-Schicht unverändert bleiben, während  $h_E'$ , gemessen von der Unterkante der E-Schicht aus, gerade doppelt so groß wird wie vorher. Eine exakte Lösung der Integralgleichung wird — wie immer sie aussehen mag — den Echozug der E-Schicht zur Berechnung der F-Höhen mit verwerten müssen; da  $h_E'$  in den beiden Fällen verschieden,  $h_F'$  aber gleich ist, könnte nicht das gleiche F-Profil erhalten werden. Dieser scheinbare Widerspruch kommt daher, daß die Voraussetzung der Monotonie nicht erfüllt und deshalb die Integralgleichung falsch angesetzt ist. Oberhalb  $f_E^o$  muß sie im allgemeinsten Fall geschrieben werden:

$$h'_o(f^2) = h_o + \int_0^{f_E^2} \mu' z'_E df_N^2 + \\ + \int_0^{f_E^2} \mu' \sum_i |z'_i| df_N^2 \Delta h + \int_{f_E^2}^{f^2} z'_F df_N^2.$$

Die Indizes bei  $z'$  bedeuten:

- E untere Hälfte der E-Schicht,
- I Zwischengebiet, in dem zu einer bestimmten Elektronendichte je nach Struktur mehrere  $z'$ -Werte gehören können, über deren Beträge zu summieren ist  $(z'_I = \sum_i |z'_i|)$ .
- F F-Schicht für  $f_N^2 \geq f_E^2$ .

Wir haben in diesem Fall ein Problem ähnlich dem von Abschnitt 3. Es sind oberhalb  $f_E^0$  zwei Funktionen gesucht, nämlich der Schichtverlauf im Zwischengebiet und derjenige der F-Schicht. Für das Zwischengebiet ist eine Lösung nur in der Form zu erhalten, daß  $z'_I$  zu gegebenem  $f_N^2$  bestimmt werden kann, falls im Zwischengebiet ein oder mehrere Minima oder Maxima in der Elektronendichte auftreten. Man erhält also eine Ersatzschicht, die bei gegebener Verteilung definiert ist durch

$$\Delta z = \int_0^{f_E^2} \sum_i |z'_i| df_N^2.$$

Meistens wird es genügen, die Verteilung im Zwischengebiet soweit zu kennen, daß dessen Verzögerungsanteil für die scheinbaren Höhen der F-Schicht einigermaßen richtig angesetzt wird, daß man also für die Frequenzen unmittelbar oberhalb von  $f_E^0$  die richtigen F-Höhen bestimmen kann. Man muß also außer an der o-Komponente mehrere scheinbare F-Höhen der x-Komponente möglichst nahe bei  $f_E^0$  ablesen und die entsprechenden Gleichungen ansetzen. Wieviele Gleichungen gebraucht werden, wird davon abhängen, wieviele Parameter zur Beschreibung des Zwischengebietes notwendig sind. Wenn es sich zeigen sollte, daß das Zwischengebiet eine relativ stabile Struktur hat und sein Gang mit Tages- und Jahreszeit bekannt ist, könnte man das Verfahren in der Weise vereinfachen, daß zur Berechnung der F-Höhen ein bestimmtes Modell als Ersatzschicht für das Zwischengebiet eingesetzt wird.

Ein Beispiel für die Umrechnung eines Tag-Ionogramms ist in Bild 6 gegeben. Hier wurde angenommen, daß E- und F-Schicht parabelförmig sind mit Halbdicken von 20 km bzw. 50 km für die untere bzw. die obere Hälfte der E-Schicht und 80 km für die untere Hälfte der F-Schicht. Das Schichtmaximum von E sei in 120 km Höhe, dasjenige der F-Schicht in 250 km Höhe. Die kritischen Frequenzen sind 2,36 MHz bzw. 5 MHz. Die ausgezogene Kurve gilt für das Modell, die unteren Punkte (•) stellen das Ergebnis der Matrixmethode dar, die oberen (x) wurden nach dem Differenzenverfahren, angewandt auf o- und x-Komponente, erhalten; für die Beschreibung der Ersatzschicht wurden zwei Parameter bestimmt.

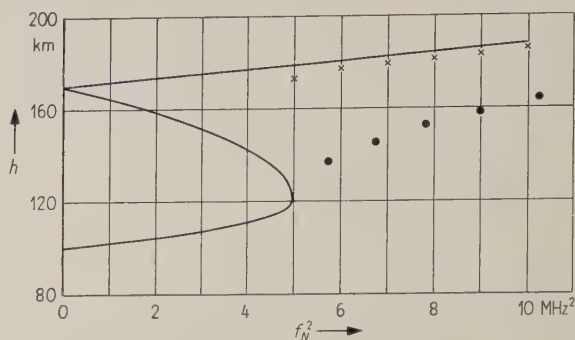


Bild 6. Modellrechnung einer nicht-monotonen Schicht nach der BUDDENSchen Methode und nach dem Differenzenverfahren unter Benutzung beider Komponenten;

- Matrixmethode, Rastersprung 0,2 MHz,
- x Differenzenverfahren mit beiden Komponenten,
- Modell.

#### 4.2. $F_1$ -Schicht

Diese Stufe in der F-Region unterbricht nur äußerst selten die Monotonie. Sollte einmal bei  $f_{F_1}^0$  der Echozug durch sehr starke Verzögerung und damit verbundene Absorption unterbrochen sein, so wird man im Prinzip genau so verfahren müssen wie bei  $f_E^0$ . Ist die Verzögerung endlich mit einem deutlichen Maximum, so genügt es, eine Unstetigkeit in  $z'$  bei  $f = f_{F_1}^0$  zuzulassen. Man erhält dann ausgehend von Gl. (9)

$$h'(f_m) - h'(f_{m-1}) = \\ = [f_m^2 g(f_m^2, f_m^2) - f_{m-1}^2 g(f_{m-1}^2, f_{m-1}^2)] z'_{m-1,l} + \\ + f_m^2 [g(f_m^2, f_m^2) - g(f_{m-1}^2, f_m^2)] (z'_{m-1,r} - z'_{m-1,l}) + \\ + \int_0^{f_m^2} k z'' df_N^2. \quad (12)$$

Dabei sei  $f_{m-1} = f_{F_1}^0$  und  $f_m$  die nächstfolgende Ablesefrequenz und

$$z'_{m-1,l} = \lim_{f_N^2 \rightarrow f_{F_1}^2} z' \quad \text{für } f_N^2 < f_{F_1}^2,$$

$$z'_{m-1,r} = \lim_{f_N^2 \rightarrow f_{F_1}^2} z' \quad \text{für } f_N^2 > f_{F_1}^2.$$

Man hat für dieses Intervall zwei Größen zu bestimmen:  $z'_{m-1,l}$  und  $z'_{m-1,r}$ . Dies kann dadurch ermöglicht werden, daß man die zugehörige Gleichung für die x-Komponente hinzunimmt oder, falls zulässig,  $z''$  über zwei Intervalle konstant annimmt. Ist bei  $f_{F_1}^0$  nur ein flaches Maximum oder gar nur ein Wendepunkt in  $h'$  vorhanden, so kann nach der normalen Methode verfahren werden. Um mit einem Ablesepunkt auf  $f_E^0$  bzw.  $f_{F_1}^0$  zu kommen, wird man entsprechende Verschiebungen des Frequenzrasters vornehmen müssen, wie in Abschnitt 3 für  $f_{F_1}^0$  in der Nacht beschrieben wurde. Das Verfahren mag dadurch relativ umständlich erscheinen. Man wird aber bei jedem Verfahren auf derart charakteristische Stellen Rücksicht nehmen müssen, wenn man nicht von vornherein darauf verzichten will, sie im entzerrten Profil wieder zu finden.

### 4.3. Abdeckende Es-Schicht

Hierbei hat man im Prinzip genauso zu verfahren wie beim Vorhandensein der E-Schicht. Man wird einigermaßen sichere Auskunft über den Schichtverlauf oberhalb der Es-Schicht erst von der Elektronendichte ab erhalten, die der Abdeckfrequenz entspricht. Für das dazwischenliegende Gebiet hat man aus o- und x-Komponente zusammen eine Ersatzschicht zu bestimmen, damit deren Verzögerungsanteil bei der weiteren Umrechnung richtig berücksichtigt werden kann.

### 5. Berechnung der Koeffizienten

Wie im Prinzip die Berechnung zu erfolgen hat, ist durch die Formel (4) und folgende eindeutig ausgesagt. Zweckmäßigerweise wird man die Koeffizienten für verschiedene Intervallbreiten zu entsprechenden maximalen Frequenzen berechnen. Z. B.

$$\Delta f^2 = 1$$

von  $f_N^2 = 0$  bis  $f_N^2 = 25 \text{ MHz}^2$  ( $f_N = 5 \text{ MHz}$ ),

$$\Delta f^2 = 4$$

von  $f_N^2 = 0$  bis  $f_N^2 = 100 \text{ MHz}^2$  ( $f_N = 10 \text{ MHz}$ ),

$$\Delta f^2 = 16$$

von  $f_N^2 = 0$  bis  $f_N^2 = 400 \text{ MHz}^2$  ( $f_N = 20 \text{ MHz}$ ),

eventuell noch für Nacht-Ionogramme mit sehr niedriger Grenzfrequenz

$$\Delta f^2 = 0,5$$

von  $f_N^2 = 0$  bis  $f_N^2 = 12,5 \text{ MHz}^2$  ( $f_N = 3,54 \text{ MHz}$ ).

Am besten läßt man zunächst einmal an allen Intervallgrenzen Unstetigkeitsstellen in  $z'$  zu und berechnet die Koeffizienten von  $z'$  und  $z''$  der Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} \Delta h'_m &= \Delta_m (f^2 g) z'_{m-1,l} + \\ &+ \sum_{v=2}^m [f_{m-1}^2 g (f_{v-1}^2, f_{m-1}^2) - \\ &- f_m^2 g (f_{v-1}^2, f_m^2)] (z'_{v-1,r} - z'_{v-1,l}) + \\ &+ \sum_{v=1}^m \left[ \int_{f_{v-1}^2}^{f_v^2} k(f_N^2; f_m, f_{m-1}^2) z''_v df_N^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

für beide Komponenten. Dividiert man durch

$$\bar{k}_{m,m} = \frac{1}{\Delta f_N^2 f_{m-1}^2} \int_{f_{m-1}^2}^{f_m^2} k(f_N^2; f_m, f_{m-1}^2) df_N^2$$

und ordnet man um, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta(z'_m) + \beta_{m,m} \Delta(z'_{m-1}) &= r_m \Delta h'_m + \beta_m z'_{m-1,l} - \\ &- \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_{m,v} \delta(z'_v) - \sum_{v=2}^{m-1} \beta_{m,v} \Delta(z'_{v-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned} \delta(z'_v) &= z'_{v,l} - z'_{v-1,r}, \quad \Delta(z'_{v-1}) = z'_{v-1,r} - z'_{v-1,l}, \\ \beta_{m,v} &= \frac{1}{k_{m,m}} f_v^2 [g(f_v^2, f_m^2) - g(f_{v-1}^2, f_m^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_m &= \frac{1}{k_{m,m}} [f_m^2 g(f_m^2, f_m^2) - f_{m-1}^2 g(f_{m-1}^2, f_m^2)], \\ \alpha_{m,v} &= \bar{k}_{m,v} / \bar{k}_{m,m}, \quad r_m = 1 / \bar{k}_{m,m}, \\ v &= 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Dies ist die allgemeinste Form unter der Voraussetzung, daß  $z''$  abschnittsweise konstant ist. Die zu bestimmenden Größen sind  $\delta(z'_m)$  und  $\Delta(z'_{m-1})$ , welche die eigentlichen Unbekannten  $z'_{m,l}$  und  $z'_{m-1,r}$  enthalten. In den meisten Fällen genügt es, bis auf einzelne Stellen  $z'$  stetig anzunehmen, dann sind fast alle  $\Delta(z'_{v-1}) = 0$  und man erhält wieder Gl. (10). Um die Verzögerung  $V$  zu berechnen, geht man von der Definitionsgleichung (6) für  $\gamma(f_N^2, f^2)$  aus

$$V(f^2, f^2) = f^2 \int_0^{\gamma(f^2, f^2)} z' d\gamma.$$

Durch partielle Integration erhält man

$$V = f^2 z'(f^2) \gamma(f^2, f^2) - f^2 \int_0^{f^2} z'' \gamma df_N^2,$$

und unter der Annahme  $z''$  abschnittsweise konstant,  $z'$  stetig

$$V(f_m^2) = f_m^2 \gamma(f_m^2, f_m^2) z'(f_m^2) - \sum_{v=1}^m z''_v \int_{f_{v-1}^2}^{f_v^2} \gamma(f_N^2, f_m^2) df_N^2. \quad (15)$$

Sind Unstetigkeitsstellen in  $z'$  an den Intervallgrenzen zugelassen, so ist

$$\begin{aligned} V(f_m^2) &= f_m^2 \gamma(f_m^2, f_m^2) z'(f_m^2) - \\ &- \sum_{v=1}^m z''_v \int_{f_{v-1}^2}^{f_v^2} \gamma(f_N^2, f_m^2) df_N^2 - \sum_{v=2}^m \Delta(z'_{v-1}) f_m^2 \gamma(f_{v-1}^2, f_m^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Für die x-Komponente gelten formal genau dieselben Formeln, man hat nur  $g$  und  $\gamma$  für die Ablesefrequenzen der x-Komponente zu nehmen und dann alle auftretenden  $f^2$  im Sinn von  $f_N^2$  an der Reflexionsstelle einzusetzen, es sind also überall, wo  $f^2$  explizit auftritt, die entsprechenden Elektronendichten einzusetzen.

### Zusammenfassung

Um aus scheinbaren Höhen möglichst gut den wahren Schichtverlauf berechnen zu können, muß versucht werden, eine bessere Meßgenauigkeit von  $h'$  zu erreichen. Dies sollte mit kürzerer Impulsdauer möglich sein. Ferner wird man bestrebt sein müssen, den Meßbereich nach möglichst tiefen Frequenzen hin auszudehnen und durch Erhöhung der Senderleistung  $h'$  möglichst weit in die Verzögerungsspitzen hinein meßbar zu machen. Dies gilt vor allem für die x-Komponente in der Nähe der Gyrofrequenz, wodurch eventuell auf die Ausdehnung des Frequenzbereichs weiter nach unten hin verzichtet werden könnte. Als Registrierskala wird eine  $f^2$ -Skala vorgeschlagen, da in ihr das Ionogramm dem gesuchten Elektronendichteprofil am ähnlichsten wird und außerdem bei Einteilung in gleiche Intervalle die  $h'$ -Staffelung gleichmäßiger wird als bei linearer oder logarithmischer Skala. Die x-Komponente wird zur Berechnung der Unter-

kante und eines eventuellen Zwischengebietes zusätzlich zur o-Komponente benötigt, wenn auch für die weitere Rechnung die o-Komponente vorgezogen wird. Bei ihr stammt nämlich der größte Verzögerungsbeitrag von Elektronendichten, die sehr nahe der kritischen Elektronendichte liegen, während bei der x-Komponente auch relativ kleine Elektronendichten noch einen deutlichen Verzögerungsbeitrag geben. Die in unserem Rechenschema benutzten Koeffizienten von  $z'$  klingen mit abnehmenden  $f_v^2$  bei der o-Komponente wesentlich rascher ab als bei der x-Komponente. Auf der anderen Seite ist es die x-Komponente, die bessere Auskunft über Elektronendichte im Zwischengebiet oder an der Unterkante geben kann.

Grundsätzlich kann ein mehrschichtiges Profil nur so berechnet werden, daß man die Verzögerung

durch tieferliegende Schichten berechnet und diese von der scheinbaren Höhe abzieht.

#### Schrifttum

- [1] KELSO, J. M., The determination of the electron density distribution of an ionosphere layer. J. atmos. terrest. Phys. **5** [1954], 11–27.
- [2] KELSO, J. M., Group height calculations in the presence of the earth's magnetic field. J. atmos. terrest. Phys. **5** [1954], 117–131.
- [3] SCHMERLING, E. R., An easily applied method for the reduction of  $h'f$  records to  $N-h$  profiles. J. atmos. terrest. Phys. **12** [1958], 8–16.
- [4] BUDDEN, K. G., A method for determining the variation of electron density with height ( $N(h)$ -curves) from curves of equivalent height versus frequency ( $h'(f)$ -curves). Report of the Conference on „The Physics of the Ionosphere“, held at the Cavendish Laboratory Cambridge, 6.–9. Sept. 1954, S. 332–339.
- [5] BECKER, W., Tabellierung der vertikalen Gruppengeschwindigkeiten ordentlicher Echos in der Ionosphäre. A.E.Ü. **11** [1957], 166–172.
- [6] BECKER, W., Verteilung der Elektronendichte in der Ionosphäre. A.E.Ü. **13** [1959], 49–57.
- [7] BIBL, K., Methoden zur Bestimmung des Ionisationsverlaufs hinter dem Maximum der E-Schicht. Naturwiss. **37** [1950], 373–374.

## BUCHBESPRECHUNGEN

**O. Zinke und H. Brunswig, Hochfrequenz-Meßtechnik; 3. neubearbeitete und vermehrte Auflage.** S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1959, XVI, 234 Seiten, 238 Bilder, 16 cm × 23,5 cm, Ganzleinen DM 24,80.

**O. Zinke und H. Brunswig, Hochfrequenz-Meßgeräte, Tabellen industrieller Meßgeräte.** S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1959, 60 Seiten, 17 cm × 24 cm, kartoniert DM 9,60.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage im Jahre 1937 hat sich das Buch bei Studierenden und Ingenieuren sehr gut eingeführt und ist praktisch zu einem Standardwerk geworden. Die neue hier vorliegende Ausgabe ergänzt und bereinigt in glücklicher Weise, was in der ersten Auflage noch offen geblieben bzw. zu weitschweifig war.

Als neue wesentliche Kapitel sind die Abschnitte über Meßsender, Messung von Phasenwinkel und Laufzeit sowie Antennenmessungen hinzugekommen. Die Beschreibungen der Meßverfahren der Mikrowellentechnik wurden beträchtlich erweitert, blieben aber nach wie vor auf verschiedene Kapitel verstreut. Vielleicht würde die Geschlossenheit der Darstellung noch gewinnen, wenn der Mikrowellenmeßtechnik ein gesonderter Buchabschnitt eingeräumt würde.

Es war ein besonders glücklicher Gedanke, gleichsam als Anhang eine Übersicht über die verschiedenen auf dem Markt gängigen Meßinstrumente und -geräte und ihre Eigenschaften in Tabellenform herauszugeben. Der erfahrene Ingenieur hat hier auf engstem Raum in seltener Vollständigkeit eine große Anzahl von Informationen zur Verfügung, die ihm bei der Auswahl und Anwendung von Meßgeräten wertvolle Hilfe und Anregung geben. Unsere Bitte an die Verfasser ist, daß sie dieses Zusatzbändchen auf dem neuesten Stand halten und in regelmäßigen Abständen neu herausgeben.

H. WILDE

**H. Graewe, Mathematik unter besonderer Berücksichtigung von Physik und Technik; Band IV: Differential- und Integralrechnung, Teil 1: Differentialrechnung.** B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1959, 144 Seiten, 126 Bilder, gebunden DM 11,20.

Die bereits erschienenen Bücher von GRAEWE \* haben den seltenen Vorzug, daß sie sich wegen des großen didaktischen Geschickes des Verfassers als Unterrichtsbücher sehr gut bewährt haben. Auch diesem weiterführenden Band merkt man sofort an, daß er aus langer Unterrichtserfahrung heraus entstanden ist; er ist daher für höhere Schulen und für höhere technische Anstalten sehr geeignet und kann ebenso wie die anderen Bücher des Verfassers bestens empfohlen werden; jeder der Selbststudien treibt, sollte zu diesem Buch greifen.

A. THOMA

\* Siehe die Besprechungen im A.E.Ü. **6** [1952], 306; **7** [1953], 211 und **11** [1957], 158.

#### Berichtigung

**W. Schübler, Die Darstellung von kopplungsfreien Abzweigschaltungen am Analogrechner** (A.E.Ü. **14** [1960], Heft 8, 327–334).

Auf Seite 329 muß im Abschnitt 2.2 der 7. Satz (links neben der Gl. (4)) richtig heißen:

„Bei allen anderen Zweipolfunktionen können sich Zähler- und Nennerpolynom im Grad um eins unterscheiden, d. h. der Grad des Zählerpolynoms kann auch um eins höher sein als der Grad des Nennerpolynoms.“

#### Mitarbeiter dieses Heftes:

Dipl.-Ing. H. G. Jungmeister, im Elektrophys. Institut der Technischen Hochschule, München 2, Arcisstraße 21; Dipl.-Phys. A. K. Paul, Ionosphären-Institut, Breisach (Rhein); Prof. Dr. H. Piloty, Technische Hochschule, München 2, Arcisstraße 21; Dr. K. Schnetzler, I. H. Siemens & Halske AG, Zentral-Laboratorium, München 25, Hofmannstraße 51; Prof. Dr. Dr. M. J. O. Strutt, Eidgenöss. Technische Hochschule, Zürich 7, Gloriastraße 35; Dr. E. Ulbrich, Backnang, Lichtensteinstraße 48; Dipl.-Ing. J. S. Vogel, im Institut für höhere Elektrotechnik der Eidgenöss. Technischen Hochschule, Zürich 7, Gloriastraße 35; Dr. K. Welland, Hannover, Am Lindener Berge 14 a; Prof. Dr. H. Wilde, Stuttgart-Feuerbach, Bubenhalde 92.

Alle Rechte, auch die der photomechanischen Wiedergabe, sind vorbehalten, jedoch wird gewerblichen Unternehmen die Anfertigung einer photomechanischen Vervielfältigung (Photokopie, Mikrokopie) von Beiträgen oder Beitragsteilen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens gegen Bezahlung der dort vorgesehenen Gebühren an die Inkassostelle für Photokopiergebühren beim Börsenverein des Deutschen Buchhandels, Frankfurt am Main, gestattet. Werden die Gebühren durch Wertmarken der Inkassostelle entrichtet, so ist für jedes Photokopierblatt eine Marke im Betrag von —,30 DM zu verwenden.

© 1960 S. Hirzel Verlag Stuttgart. Printed in Germany. Satz und Druck: K. Triltsch, Graphischer Großbetrieb, Würzburg.

# VOM WESEN DER NACHRICHT

VON PROF. DR. G. MEGLA

etwa 190 Seiten mit etwa 70 Bildern,  
mehreren Tafeln und Tabellen. Ganzleinen etwa DM 23,—  
Erscheint im November 1960

## 1. Kapitel. Die Nachricht

1.1 Vorbetrachtung — 1.2 Die Symbole der Nachricht —  
1.2.1 Die Symbolarten — 1.2.2 Die Empfangsbereit-  
schaft — 1.3 Die unbewußte Nachrichtenübertragung —  
1.4 Die bewußte Nachrichtenübertragung — 1.5 Der  
Weg einer Nachricht — 1.6 Die transportfähige Nach-  
richt mit langer Übertragszeit — 1.7 Die transport-  
fähige Nachricht mit kurzer Übertragszeit

## 2. Kapitel. Die Nachrichtenverbindungen

2.1 Die Träger der Nachrichtensymbole — 2.1.1 Das  
Signal als Träger des Symbols — 2.1.2 Mechanische  
Träger — 2.1.3 Der elektrische Strom als Symbolträ-  
ger — 2.1.4 Die akustische Trägerschwingung — 2.1.5  
Die elektromagnetische Trägerschwingung — 2.2 Die  
Teilstrecken einer Verbindung — 2.3 Optische und  
akustische Verbindungen — 2.4 Interplanetarische Ver-  
bindungen

## 3. Kapitel. Die elektrische Nachrichtenübertragung

3.1 Verfahren der elektrischen Nachrichtenübertra-  
gung — 3.2 Der Informationsgehalt der elektrischen  
Nachrichtenübertragung — 3.3 Neue Anwendungs-  
gebiete

## 4. Kapitel. Die unmittelbare Nachrichtenübertragung

4.1 Vorbetrachtung — 4.2 Die nachrichtentechnischen  
Eigenschaften der Sinnesorgane — 4.3 Sinnesorgane  
und Nachrichtenverbindungen der Tiere — 4.4 Die  
Nachrichtenübertragung im Nervensystem

## Literaturverzeichnis — Sachwortverzeichnis

Die modernen Nachrichtensysteme sind wie der Mensch in der Lage, Wahrnehmungen nicht nur aufzunehmen, sondern auch zu konzentrieren, zu speichern, zu verarbeiten und darüber hinaus ohne menschliche Hilfe logische automatisch überwachte Handlungen auszulösen. Aber auch mit diesen hochqualifizierten technischen Mitteln sind wir noch weit entfernt von Güte, Vielfalt und Zuverlässigkeit der nachrichtentechnischen Organe, wie sie das höchstentwickelte Lebewesen, der Mensch, besitzt.

Da die überaus schnelle Entwicklung der Technik die Gefahr birgt, die großen Zusammenhänge aus dem Auge zu verlieren, wird in diesem Buch der Versuch unternommen, Sinn und Wesen der Nachrichtenübertragung in einer möglichst umfassenden Gesamtschau darzustellen, deren Kenntnis es erleichtern wird, den richtigen Weg zu gehen und die gegebenen Möglichkeiten sinnvoll anzuwenden.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

## messgeräte der nachrichtentechnik

Zur Messung von Frequenzhub, Pegel und Modulationsgrad dient der  
**Frequenzhubmesser FHM-88.**

Er ermöglicht folgende Messungen:

### Frequenzhub

Vollausschlag 5 ... 150 kHz, ablesbar 200 Hz.

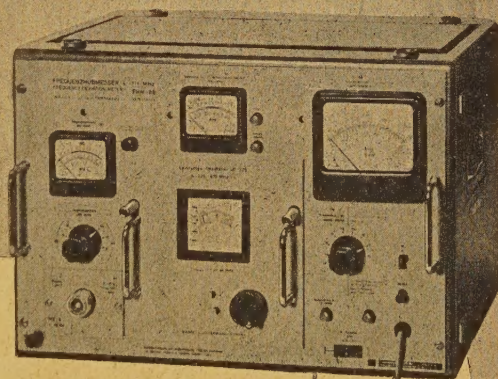
### Modulationsgrad

Vollausschlag 5 ... 100%, ablesbar 0,2%.

### Eingangsspannung 10 ... 300 mV.

Frequenzbereich des Trägers 4 ... 600 MHz.

Frequenzhub und Modulationsgrad werden bis 1300 MHz noch richtig angezeigt.

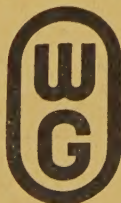


Die Messung des Frequenzhubs erfolgt nach einem Zählverfahren. Damit wird eine außerordentlich hohe Meßgenauigkeit erreicht.

Für die Umsetzung der Meßfrequenz in den ZF-Meßbereich werden die Oszillatoreinschübe unseres Leistungsmeßsenders LMS-68 verwendet. Diese sind auch für sich allein als Leistungsozillatoren verwendbar, so daß damit eine mehrfache, wirtschaftliche Ausnützung gewährleistet ist.

Das Gerät ist kurzfristig lieferbar.

FORDERN SIE UNVERBINDLICH DIE ZUSENDUNG VON PROSPEKTUNTERLAGEN



**WANDEL u. GOLTERMANN**  
REUTLINGEN · WÜRTT.

